FATİH SULTAN MEHMET VAKIF ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
BİLİM TARİHİ ANABİLİM DALI
BİLİM TARİHİ PROGRAMI

BOSTANÎZÂDE MEHMET TAHİR PAŞA'NIN USÛL-İ CEBR ADLI ESERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SULTAN TEKİN

İSTANBUL, 2024

FATİH SULTAN MEHMET VAKIF ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
BİLİM TARİHİ ANABİLİM DALI
BİLİM TARİHİ PROGRAMI

BOSTANÎZÂDE MEHMET TAHİR PAŞA'NIN USÛL-İ CEBR ADLI ESERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SULTAN TEKİN
(200141004)

Danışman
(Prof. Dr. Mustafa Kaçar)

DÜZELTİLMİŞ TEZ

İSTANBUL, 2024

FATİH SULTAN MEHMET VAKIF ÜNİVERSİTESİ

FATİH SULTAN MEHMET VAKIF ÜNİVERSİTESİ
TEZ ONAY FORMU

10 /05/2024

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Bilim Tarihi Anabilim Dalı Bilim Tarihi tezli yüksek lisans programı öğrencisi 200141004 numaralı ***Sultan TEKİN***'in hazırladığı, *"Bostanizâde Tahir Paşa'nın Usûl-ı Cebr Adlı Eseri""* konulu tezi ile ilgili Tez Savunma Sınavı, 29.04.2024 Pazartesi günü saat 14:00'de yapılmış, sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin **Kabulüne Oy Çokluğu/~~Oy Birliği~~** ile karar verilmiştir.

Tez adı değişikliği yapılması halinde: Tez adının ....
....
şeklinde değiştirilmesi uygundur.

Jüri Üyesi	Karar
1. Prof. Dr. Mustafa KAÇAR (Danışman)	Kabul
2. Dr. Öğr. Üyesi Nihal ÖZDEMİR	Kabul
3. Dr. Öğr. Üyesi Zehra BİLGİN	Ret
4.	....
5.	....
6. (İkinci Danışman)*..	....

**2. Danışman varsa doldurulması gerekmektedir.*

ETİK BİLDİRİM

Bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bağlı olduğum üniversite veya bir başka üniversitedeki başka bir çalışma olarak sunulmadığını beyan ederim.

Sultan Tekin

DÜZELTME METNİ

- Özet değişti
- Önsöz değişti
- Sonuç değişti
- Kaynakça güncellendi
- Bölüm sıralaması yeniden yapıldı

BOSTANÎZÂDE MEHMET TAHİR PAŞA'NIN USÛL-İ CEBR ADLI ESERİ

Sultan Tekin

ÖZET

Tezimizin konusu, 19. Yüzyılda Osmanlıda yaşamış matematikçilerden Bostanîzâde Mehmet Tahir Paşa tarafından kaleme alınan *Usûl-i Cebr* isimli matematik eserinin transliterasyonu, sadeleştirilmesi ve içerik incelemesini kapsamaktadır. "Usûl-i Cebr" cebir ilminin dayandığı prensipleri ve öğretilme yöntemleri anlamına gelmektedir. Askeri okullarda ders kitabı olarak okutulmuş *Usûl-i Cebr*, bu açıdan hem cebir ilminin prensiplerini hem de öğretim yöntemlerini bir arada sunmaktadır.

Girişte klasik dönemde Osmanlının tevarüs ettiği bilim hayatı ve cebir bilimine ilişkin eserlere kısaca göz attıkktan sonra özellikle Semerkant ekolünden yetişen alimlerin eserlerinin Osmanlı cebir eğitimindeki gelişmelere ve Osmanlı cebir geleneğinin oluşmasına değinilecektir. Klasik Osmanlı döneminde telif edilen hesap kitaplarındaki cebir bölümlerine ilişkin bibliyografik veriler yanında klasik dönemden modern döneme geçiş sırasında klasik tarzda yazılmış hangi eserlerin kullanıldığına başlıklar altında temas edilmiştir. Osmanlı eğitim ve bilim hayatındaki değişmelere kısaca temas edildikten sonra asıl olarak 1834'te kurulan Mekteb-i Harbiye'de cebir eğitiminde, Bostanizâde Mehmet Tahir Paşa'nin *Usûl-i Cebr* kitabının yerine dikkat çekilmiştir. Bu bölümde aynı zamanda 1834'te kurulan Mekteb-i Harbiye'de matematiğin ana dallarından biri olan cebir eğitiminin kapsamı, mahiyeti ve önemi incelenmiş ve cebir eğitiminin modern eğitimdeki yeri usulleri üzerinde durulmuştur.

Birinci Bölümde, *Usûl-i Cebr* müellifi Bostanîzâde Mehmet Tahir Paşa'nın hayatı, eğitimi, kariyeri ve diğer çalışmaları ayrı ayrı başlıklar halinde ele alınmıştır.

Sultan II. Mahmud döneminde (1808-1839) ilk defa yurt dışına gönderilen öğrencilerden biri de Mehmet Tahir olmuştur. İngiltere'de –muhtemelen

Cambridge’de– eğitim gören Mehmed Tahir, yurda döndükten sonra uzun yıllar Harbiye Mektebi’nde hocalık ve ders nazırlığı yapmıştır. Mehmed Tahir Paşa eğitimde eksikliğini hissettiği ‘cebir’ konusunda tercüme değil doğrudan bir eser telif etmeyi tercih etmiştir.

Tahir Paşa'nın yetiştirdiği talebeler arasında *Lineer El-Cebra* adlı eserin yazarı Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa da bulunmaktadır. Vidinli Tevfik Paşa, hocasının *Usûl-i Cebr* adlı kitabına yapmış olduğu *zeyl* sebebiyle onun bu çalışmasına da kısmen değinmek zorunda kaldık.

Tezimizin ana gövdesini *Usûl-i Cebr’*in transliterasyonu oluşturmaktadır. Tabii olarak sadeleştirme öncesinde eserin -alıştırmalar kısmı hariç- transliterasyonu yapılmış ve bu tezin üçüncü bölümüne konmuştur. Bu yoğun emek ve hassasiyet isteyen çalışma sonrasında ancak bir matematiksel değerlendirme imkânı doğmuştur.

Usûl-i Cebr; cebirin temel kavramlarını ve problemlerini ele alan bir kitap olup öncelikle dönemin matematik eğitimi ve araştırmalarında cebirin önemini vurgulamaktadır, oldukça da kapsamlıdır. Eser, mukaddime ve 37 konu başlığı altında toplam 186 maddeden oluşmaktadır.

Mukaddimede müellif klasik dönem Osmanlı bilim literatürü dibacelerinde yer alan hamdele, salvele ve dualardan sonra eseri yazma sebebini şu şekilde açıklamaktadır. Mekteb-i Harbiye-i Şahane ilm-i cebr ve'l-mukabele dersi hocalığına tayin olduğumda talebeler için yabancı dillerden tercüme yolu ile perakende notlar hazırlamıştım. Akabinde bu notların dağılması, başka işler için kullanılması kaçınılmaz olduğundan bu dağınık notları bir araya getirmeyi azmetmiştim. Tahir Paşa daha önce Mühendishane-i Berri-i Hümayun eski başhocası Hacı Hafız İshak Efendi'nin yazıdğı *Mecmua-i Ulum-ı Riyaziye*'nin 1. Cildinde cebir ilmine ilişkin bazı kurallar yer almakta olduğunu ayrca konu ile ilgili Avrupa dillerinden çevrilmiş, mütercimleri bilinmeyen birkaç risale daha yazıldığını ancak bütün bunların oldukça yetersiz ve başlangıç seviyesinde kaldığına dikkat çekmiştir. Oysa müellife göre cebir ilmi birçok yöntem ve kuralı kapsar, ayrıca uygulama alanında ise uzmanlık derecesinde bir tahsili gerektirir. Bütün bunları göz önünde bulunduran Tahir Paşa, öteden beri içinde ukte olan eserini nihayet Sultan Abdülmecid Han zamanında tamamlama imkânı bulmuştur. Adını da "*Usûl-i Cebr*" koymuştur.

Tezimizde Mekteb-i Harbiye'de cebir dersleri, cebir eğitimi veren hocalar ile bu kişilerin yazdıkları cebire dair kitaplar ve içerikleri de ayrıca araştırılmıştır. Öncelikle Mekteb-i Harbiye müfredatı incelenerek ilgili veriler tespit edilmiştir.

Son olarak Tahir Paşa'nın *Usûl-i Cebr* adlı eserinin transliterasyonu, sadeleştirilmesi ve içerik incelemesi yapılmıştır. Tezin sonunda, eserde geçen matematik terimlerinin bir sözlüğü hazırlanmış ve okuyucuların istifadesine sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Osmanlı, Matematik, Cebir, Bostanizâde Tahir Paşa, Usûl-i Cebir, Mekteb-i Harbiye

BOSTANÎZÂDE MEHMET TAHİR PASHA HIS WORK TITLED USÛL-İ JABR

Sultan Tekin

ABSTRACT

The subject of our thesis is the transliteration, simplification and content analysis of the mathematical work *Usûl-i Cebr* written by Bostanîzâde Mehmet Tahir Pasha, one of the mathematicians who lived in the Ottoman Empire in the 19th century. "*Usûl-i Cebr*" means the principles on which the science of algebra is based and the methods of teaching it. *Usūl al-Jabr*, which was taught as a textbook in military schools, presents both the principles of algebra and teaching methods together.

After briefly reviewing the scientific life of the Ottoman Empire in the classical period and the works on the science of algebra, we will discuss the developments in Ottoman algebra education and the formation of the Ottoman algebra tradition, especially the works of scholars from the Samarkand school. In addition to bibliographic data on the algebra chapters in the calculus books written in the classical Ottoman period, the works written in the classical style during the transition from the classical period to the modern period are discussed under headings. After briefly touching upon the changes in Ottoman education and science, attention is drawn to the place of Bostanizade Mehmet Tahir Pasha's *Usûl-i Cebr* in algebra education at the Mekteb-i Harbiye, which was founded in 1834. This chapter also examines the scope, nature and importance of algebra education, one of the main branches of mathematics at the Mekteb-i Harbiye established in 1834 and emphasizes the place of algebra education in modern education.

In Chapter One, Bostanîzâde Mehmet Tahir Pasha's life, education, career and other works are discussed under separate headings.

Mehmet Tahir was one of the first students sent abroad during the reign of Sultan Mahmud II (1808-1839). Mehmed Tahir studied in England, probably in

Cambridge, and after returning home, he worked as a teacher and lecturer at the Harbiye Mektebi for many years. Mehmed Tahir Pasha preferred to compose a direct work on 'algebra', which he felt was lacking in education, rather than translating it.

Among the students trained by Tahir Pasha was Vidinli Hüseyin Tevfik Pasha, the author of Linear El-Cebra. Since Vidinli Tevfik Pasha made an addendum to his teacher's book Usul-i Jabr, we had to partially mention his work.

The main body of our thesis is the transliteration of Usûl-i Jabr. Naturally, before the simplification, the transliteration of the work -except for the studies- was done and placed in the third chapter of this thesis. Only after an intensive and sensitive studying on this work, a mathematical evaluation was possible.

Usûl-i Cebr is a book that deals with the basic concepts and problems of algebra, emphasizes the importance of algebra in mathematics education and research of the period, and is quite comprehensive. The work consists of a total of 186 articles under 37 topics and an introduction.

In the introduction, the author explains the reason for writing the work after the hamdele, salvala and prayers that are found in the classical Ottoman scientific literature. When I was appointed as a lecturer at the Mekteb-i Harbiye-i Şahane, I had prepared retail notes for the students through translations from foreign languages. Subsequently, since it was inevitable that these notes would be scattered and used for other works, I was determined to bring these scattered notes together. Tahir Pasha pointed out that the first volume of the Mecmua-i Ulum-ı Riyaziye, written by Hacı Hafız İshak Efendi, the former head teacher of the Mühendishane-i Berri-i Hümayun, contained some rules on algebra, and that there were a few other treatises on the subject translated from European languages, the translators of which were unknown, but all of these were quite inadequate and remained at an elementary level. However, according to the author, the science of algebra encompasses many methods and rules and requires a specialized education in its application. Considering all this, Tahir Pasha finally found the opportunity to complete his work, which had been a longtime ambition of his, during the reign of Sultan Abdülmecid Khan. He named it "*Usul-i Cebr*".

In our thesis, the algebra courses at Mekteb-i Harbiye, the professors who taught algebra, the books on algebra written by these people and their contents were also investigated. First of all, the curriculum of Mekteb-i Harbiye was analyzed and the relevant data were identified.

Finally, the transliteration, simplification and content analysis of Tahir Pasha's Usûl-i Cebr were analyzed. At the end of the thesis, a glossary of the mathematical terms in the work was prepared and presented to the readers.

Keywords: Ottoman, Mathematics, Algebra, Bostanizade Tahir Pasha, Usûl-i Jabr, Mekteb-i Harbiye

ÖNSÖZ

18.-19. Yüzyıllarda Osmanlılarda her alanda görülen değişimler, bilim ve eğitim alanında da gerçekleşmiştir. Osmanlıların bilime ve özellikle klasik dönemlerden beri devam eden matematik konularına olan ilgilerinin modernleşme döneminde de devam ettiğini söylemek mümkündür. Ancak bu alandaki çalışmalar oldukça sınırlıdır. Hatta matematiğin en önemli alanlarından biri kabul edilen *cebir*in incelenmesi neredeyse ihmal edilmiştir. Bunun başlıca sebepleri arasında konunun çok yönlü araştırılmaya muhtaç olması zikredilebilir. Böyle bir cebir kitabının tez olarak yapılabilmesi için yani cebrin Osmanlı matematiği açısından ele alınabilmesi için bir araştırmacının yeterli düzeyde matematik, bilim tarihi ve Osmanlıcaya hâkim olması elbette bir gereklilik arz etmektedir. Fatih Sultan Mehmet Vakıf Üniversitesi Bilim Tarihi Anabilim Dalı'nda bu imkânı buldum ve bir matematik öğretmeni olarak yüksek lisans tezimi Osmanlı'da modern dönemde cebir eğitimi konusunda yapmayı seçtim. Böylece sadece Osmanlı matematik tarihine değil aynı zamanda Osmanlı bilim eğitimi tarihinde az araştırılmış cebir eğitimi konusuna az da olsa katkıda bulunmayı hedefledim.

Klasik tarzdan modern tarza geçiş dönemi olarak nitelendireceğimiz 19.yüzyılda birçok bilim dalında olduğu gibi münhasıran "cebir" alanında da önemli sayabileceğimiz değişimler yaşanmıştır. Amaçlarımızdan biri de tezimizde bu değişimi Osmanlıda ilk müstakil cebir kitabı olması nedeniyle Bostanîzâde Mehmet Tahir Paşa'nın *Usûl-i Cebr* adlı eserini inceleyerek anlatmaktır. Bunun Osmanlıda yeni bilimlerin ya da bilim dallarına ilişkin yeni usullerin kabulü, adaptasyonu ve yaygınlaştırılması açısından tezimizin ana problemine ışık tutacağı kanaatindeyiz.

Bu çalışma esnasında öncelikle her türlü desteği veren, her türlü imkânı sağlayan ve motivasyonumu hep yüksek tutan annem Fatma Tekin'e ve babam Mustafa Tekin'e çok teşekkür ediyorum. Ayrıca bu uzun süreçte desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen abim Fatih Tekin'e, kız kardeşim Münevver Tekin Sezer'e teşekkür ederim.

Her tez gibi bizim tezimiz de birçok emek ve katkıyla hazırlanmıştır. Öncelikle tez konusunun belirlenmesinden ve yönlendirmelerinden dolayı ilk danışmanım

Dr. Öğrt. Üye. Zehra Bilgin'e teşekkürü bir borç bilirim. Daha sonra tez danışmanlığımı kabul eden ve ilk satırından son satırına kadar tezimizin son haline ulaşmasındaki katkılarından dolayı hocam Prof. Dr. Mustafa Kaçar'a teşekkür ederim. Kendisiyle çalışabildiğim için kendimi çok şanslı sayıyorum. Ayrıca dara düşüp takıldığımız yerde bize yardımını esirgemeyen arkadaşlarıma da çok teşekkür ediyorum.

Nisan, 2024 Sultan Tekin

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER

C	: Dokunun kapasitansı
H	: Isı miktarı
M_x, M_y, M_{xy}	: Moment Bileşenleri
N_x, N_y, N_{xy}	: Normal Kuvvet Bileşenleri
q	: Faz yükü
t	: Zaman
u,v	: Yer değiştirme vektörü bileşenleri
w	: Açısal hız
XC	: Kapasitif reaktans
XL	: Endüktif reaktans
α	: Asal gerilme doğrultusundan sapma açısı
ρ	: Yoğunluk
σ_x, σ_y, σ_{xy}	: Kabuk iç gerilmeleri

KISALTMALAR

a.e.	Aynı eser/yer
a.g.e.	Adı geçen eser
a.y.	Yazara ait son zikredilen yer
b.a.	Eserin bütününe atıf
bkz.	Bakınız
bkz.: aş.	Eserin kendi içinde aşağıya atıf
bkz.:yuk.	Eserin kendi içinde yukarıya atıf
C.	Cilt
çev.	Çeviren
ed. veya haz.	Editör/yayına hazırlayan
k.g.	Karşı görüş
karş.	Karşılaştırınız
s.	Sayfa/sayfalar
t.y.	Basım tarihi yok
v.d.	Çok yazarlı eserlerde ilk yazardan sonrakiler
y.y.	Basım yeri yok

GİRİŞ

14. yüzyıldan 20. yüzyılın başlarına kadar bir dünya gücü olan Osmanlı İmparatorluğu, yalnızca siyasî ve askerî açıdan değil aynı zamanda bilimsel ve matematiksel gelişimin de zemini idi. Çeşitli çalışma alanları arasında cebir, Osmanlı İmparatorluğu'nun bilim geleneğinde önemli bir yere sahiptir. Osmanlı İmparatorluğu'nda cebirin temeli, İslam yönetimi altında bilim, teknoloji ve kültürde dikkate değer gelişmelerin yaşandığı bir dönem olan İslam'ın Altın Çağı'na kadar izlenebilmektedir. 8. yüzyıldan 14. yüzyıla kadar uzanan bu dönemde cebire çığır açan katkılarda bulunan çok sayıda İslam matematikçisinin çalışmaları görülmüştür. Bunların arasında en dikkate değer olanı, eserleri daha sonra Osmanlı topraklarında tercüme edilen ve üzerinde çalışılan El-Harizmi'dir[1]. 13. yüzyılın sonlarında kurulan Osmanlı İmparatorluğu, İslam'ın Altın Çağı'nın zengin entelektüel geleneklerini miras almıştır. İmparatorluk genişledikçe Bizanslıların ve Perslerin gelenekleri de dahil olmak üzere çeşitli kültürel ve entelektüel gelenekleri özümsemiştir. Bu birleşme, cebir de dahil olmak üzere matematik bilimlerinin geliştiği eşsiz bir ortamın oluşmasına yol açmıştır. Osmanlı İmparatorluğu'nda cebir eğitimi ve öğretimi öncelikle medreselerde yürütülmüştür. Bu kurumlar cebirsel bilginin yayılmasında ve gelişmesinde önemli bir rol oynamışlardır. Cebirin miras hukuku, mimari ve astronomi dahil olmak üzere çeşitli uygulamalar için gerekli olduğu düşünülmüştür. Osmanlıların cebire önemli katkıları olmuş, çoğu zaman onu geometrik yöntemlerle harmanlamışlar ve bu da Avrupa'daki cebir geleneklerine göre farklı bir yaklaşım olmuştur. Bu sentez cebirsel problemlere özgün yöntemlerin ve çözümlerin geliştirilmesine yol açmıştır.

[1] Harezmi için bk. “Abu Abdallah Mohammed ben Musa,of Khowarezm, who it appears, from his preface, wrote this Treatise at the command of theCaliph Al Mamun, was for a long time considered as the original inventor of Algebra”. Eserin önsözünde Halife Me’mûn’un emriyle bu eseri yazdığını belirten Abdullah Muhammed bin Musa el Harezmi, uzun yıllardan beri Cebir’in mucidi olarak bilinmekteydi. *The Algebra of Mohammed Ben Musa*. Ed. ve tercüme eden Frederic Rosen. London1831, s. V. https://ia802609.us.archive.org/6/items/algebraofmohamme00khuwrich/algebraofmohamme00khuwrich.pdf (01.2024).

1-Osmanlılarda Cebir'in Kaynakları

İslam bilimini ve kurumlarını tevarüs eden Osmanlılar, Selçuklu Türkleri vasıtasıyla cebir konusundaki birikime sahip olmuşlar ve ilk dönemlerden itibaren telif eserler vererek bu bilimi geliştirmişlerdir. [2] Yukarıda da belirttiğimiz gibi bu çalışmalar klasik dönemde başta miras hukuku (feraiz) olmak üzere cebir eğitiminin yoğun olarak yürütüldüğü medreseler de gerçekleşmiştir.

Osmanlı Medreselerinde İlim adlı eserin yazarı Cevat İzgi, aritmetik ve cebir alanında okutulan kitaplar bahsinde şunları yazmaktadır: mesela en yaygın olan kitaplar arasında Ali Kuşçu'nun *el- Muhammediye fi'l-Hisab*'ı ile Bahauddin el-Amili'nin *Hulasatu'l-Hisab* adlı eserleri hem erken dönem hem de yaygın olarak medreselerde kullanılmıştır. [3] Bu görüş, Osmanlı Klasik Döneminde İstanbul'da Matematik İlimler konulu bir makale yazmış olan Dr. Elif Baga tarafından da kabul görmektedir. Elif Baga, ifadesinde Osmanlı İmparatorluğu'nda cebir, İslam geleneği çerçevesinde öncelikle hukuk alanında özellikle de zekât ve miras ile ilgili hesaplamalarda ve pratik uygulamalarda kullanılmıştır. Zira dinî yükümlülüklerde gereken kesinlik, cebirsel ilkelerin derinlemesine anlaşılmasını gerektirmiş ve dinî nedenlerden dolayı gerekli görülmüştür. Diğer bir ifadeyle hukuk alanına yoğunlaşmış medreseler, Osmanlı eğitim sistemi içerisinde cebir ve matematik öğrenimini de öncelemişlerdir. Yine Baga'nın tespitlerine göre hukukun ayrılmaz bir parçası olan cebir ve cebir literatürü yeterince incelenmemiş, hâlâ kütüphanelerimizde zengin yazmalar ve metinler bulunmaktadır. Bu alanda gelecekte yapılacak araştırmaların yalnızca Osmanlı'nın cebire yaptığı katkılara daha fazla ışık tutmayı değil aynı zamanda matematiğin küresel tarihine dair daha derin bir anlayış sağlamayı da vaat etmektedir. [4]

Osmanlı biliminin öncülerinden Kadızade-i Rumî, (öl. 1431?) Semerkant'a gitmeden önce Bursa'da 1382 yılından yazmış olduğu *Muhtasar fi'l-Hisâb* adlı eserinde ikinci bölümü cebir konusuna ayırmıştır. Burada temel cebirsel ifadelerle mesâil-i sitteyi incelemiştir. Bu durum, daha Osmanlılar'ın ilk döneminde Anadolu'da

---

2 İhsan Fazlıoğlu, "Cebir", TDV İA, C. 7, 1993, 195-201.
3 Cevat İzgi, *Osmanlı Medreselerinde İlim*, C. 1, s. 207.
4 E. Baga, "Osmanlı Klasik Döneminde İstanbul'da Matematik İlimler", *Bilimname*, 45/2, (2021), s. 79–119

böyle bir eserin telifini mümkün kılacak bilgi birikiminin mevcut olduğunu göstermektedir. [5]. Bu da bize Osmanlı ilminin Fâtih Sultan Mehmed öncesine rastlayan bu teşekkül döneminde telif edilen genel hisâb kitapları içinde cebir özel bier yer verildiğini göstemektedir.

Osmanlı matematik çalışmaları büyük ölçüde Semerkant ekolünden etkilenmiştir. Gerçekten de Uluğ Bey'in (1394–1449) Semerkant'ta kurmuş olduğu medreseler ve Semerkand Rasathanesi'nde yaptığı çalışmalar, Osmanlı matematik ve astronomi hayatında kaynaklık etmiştir.

Fâtih Sultan Mehmed ile başlayan Osmanlı ilminin yükseliş döneminde Semerkant'tan İstanbul'a giden Kadızâde'nin öğrencileri Ali Kuşçu (ö. 879/1474) ve Fethullah eş-Şirvânî (ö. 1486) ile matematik sahasında bir canlanma görülür. Bu birikim üzerinde Zekeriyyâ el-Ensârî (ö.1520) Fetḥu'l-Mübdiʿ fî şerḥi'l-Muḳniʿ adıyla İbnü'l-Hâim'in cebire dair eserini şerhetmiş ve bu telif hareketi Mîrim Çelebi (ö. 931/1524), Abdülalî el-Bircendî (ö. 934/1527-28 [?]), Hayreddin Halîl b. İbrâhim ve Mehmed Edirnevî tarafından devam ettirilmiştir. Daha sonra Abdülazîz b. Abdülvâcid el-Miknâsî (ö. 964/1557) Nüzhetü'l-elbâb ve zübdetü't-telḫîş li'l-ḥisâb adlı eserinde cebire özel bir bölüm ayırmış, Matrakçı Nasuh (ö. 971/1564 [?]) Türkçe kaleme aldığı Umdetü'l-hisâb adlı kitabının dördüncü bölümünü cebire tahsis etmiş ve Abdülmecîd b. Abdullah es-Sâmûlî (Onaltıncı yüzyıl) *er-Risâletü'n-nâfiʿa fi'l-ḥisâb ve'l-cebr ve'l-hendese* adında bir eser yazmıştır. Semerkant'ta yetişen alimler ve hazırlamış oldukları "*Zic-i-Sultani*" adlı astronomi kitabı ve onunla rasathanede görev alan matematikçilerden cebirsel formüller de dahil olmak üzere matematiksel hesaplamalarla derinlemesine iç içe geçmiştir.[6]

Osmanlı matematik çalışmalarını büyük ölçüde etkileyen önde gelen bir diğer matematikçi ve astronom, Gıyaseddin Cemşid el-Kâşî'nin (1380–1429) çalışmaları olmuştur. Başta "*Miftahü'l-Hisab*-Aritmetiğin Anahtarı" adlı eserinde cebir de dahil olmak üzere çeşitli konulara değinmiştir. El- Kâşî'nin kübik denklemleri çözme yöntemleri ve ondalık kesirleri geliştirmesi devrim niteliğindedir ve Osmanlı

[5] İhsan fazloğlu, bu esere kısa bir süre sonra (786/1385) adı bilinmeyen bir müellif tarafından *Şerḥu Muḫtaṣar fi'l-ḥisâb* adıyla bir şerh yazılmış olduğunu belirtmektedir. İ. Fazlıoğlu, a.g.m., s. 195-201.

[6] İ. Fazlıoğlu, a.g.m., s. 195-201.

matematik yaklaşımını önemli ölçüde etkilemiştir. El-Kâşî'nin "Risāle el-veter ve'l-Ceyb" (Akor ve Sinüs Üzerine İnceleme) adlı eseri bağlamında İslam cebiri ve trigonometrisindeki en yüksek noktalardan birini temsil etmektedir. Bugünkü bilgilerin ışığında, Tûsî'den sonra İslâm ilim tarihinde üçüncü dereceden denklemlerle ilgili orijinal katkıların sona erdiği söylenebilir. Ancak bu konuda Gıyâseddin Cemşîd el-Kâşî'nin (ö. 832/1429) Miftâḥu'l-ḥisâb'ında verdiği bilgiler oldukça ilginçtir (s. 413-414). Ona göre eğer a, x, x^2, x^3 gibi dört terim çeşitli şekillerde düzenlenirse yirmi beş denklem ortaya çıkar.[7]

el-Kâşî'nin özellikle Osmanlı matematik geleneğine etkisi aynı şekilde Uluğ Bey'in Rasathanesi'nde çalışmış, daha sonra Fatih Sultan Mehmet Han'ın daveti üzerine çalışmalarını İstanbul'da devam etmiş olan Ali Kuşçu (1403–1474) tarafından da devam ettirilmiştir. Ali Kuşçu'nun özellikle kapsamlı cebirsel hesaplamalar ve metodolojiler içeren "*Risale der İlm-i Hey'e*" (Kozmografi Özeti Üzerine Yorum) adlı eseri, cebirin astronomi bağlamında öğretilmesinde ve uygulanmasında etkili olmuştur.

16. yüzyılda ise ünlü bir Osmanlı amirali ve denizci aynı zamanda bir matematikçi olan Seydi Ali Reis (1498–1563), "*Mir'âtü'l-Memâlik*" adlı eserinde, Osmanlı döneminde denizcilik ve coğrafyada matematiğin pratik uygulamalarına ve bu alanlarla ilgili cebir yönlerine ilişkin değerli bilgiler sunmaktadır. 17. Yüzyılda çalışmalarında matematik ve cebir konularına yer veren hatta bunların toplum hayatındaki yeri ve önemine dikkat çeken Osmanlı entelektüellerinden Kâtip Çelebi (1609–1657) *Mizanü'l-Hakk fî İhtiyâri'l-Ahakk* adlı eserinde çeşitli bilimsel disiplinleri inceleyerek, zamanın matematiksel anlayışına dair değerlendirmeler yapar.[8]

16. yüzyılın sonlarına doğru büyük astronom-matematikçi Takıyyüddin er-Râsıd (ö. 993/1585), *Kitâbü'n-Nisebi'l-müteşâkile fi'l-cebr ve'l-muḳābele* adıyla bir kitap telif etmiştir. Aynı dönemde Dâvûd-i Antâkî de (ö. 1008/1599) *Risâletü'l-muḫtaṣar fi'l-cebr ve'l-muḳābele* adlı eserini yazmıştır. Bu yıllarda ortaya konan en

[7] İ. Fazlıoğlu, a.g.m., s. 195-201.
[8] Ölmez, A. "II. Meşrutiyet Devrinde Osmanlı Medreselerinde Reform Çabaları ve Merkezileşme", *Vakıflar Dergisi*, 41, (2014), s. 1–14.

önemli matematik-cebir kitabı, Ali b. Velî Hamza el-Mağribî'nin 999 (1590) yılında Türkçe olarak telif ettiği *Tuhfetü'l-a'dâd li-zevi'r-rüşd ve's-sedâd* isimli eserdir. Farklı bir terkim usulünün (yük usulü) kullanıldığı eserin üçüncü makalesinde "erbaa mütenâsibe" ve "hisâbü'l-hataeyn" yöntemleri incelendikten sonra üçüncü bölümde cebir ve mukabele ele alınmıştır. Mağribî bu bölümde denklemler konusunda yenilik getirmemesine rağmen meseleyi bütün ayrıntıları ile incelemiş ve oran (tenâsüp) bahsinde bir aritmetik dizi ile bir geometrik dizi arasında ilişki kurarak logaritmaya oldukça yaklaşmıştır. Dördüncü makalede ise birçok problemi cebir ve mukabele yoluyla çözmüştür. Sâlih Zeki'nin ifadesine göre bu eserin cebir açısından taşıdığı diğer bir önemli özellik de Kalesâdî'den daha gelişmiş biçimde cebirsel notasyon ve sembol kullanmasıdır. Bu durum, 16. yüzyıl sonlarında Osmanlı cebirinde notasyon ve sembollerin kullanıldığını açıkça göstermektedir.[9]

Osmanlı cebirinin 16. yüzyılın sonlarına doğru bulunduğu seviye ve ortaya koyduğu cebir anlayışı, şüphesiz en iyi şekilde Taşköprizâde'nin *Miftâḥü's-saʿâde* adlı eserinden takip edilebilir. Taşköprizâde, cebir ve mukabele tanımlamalarından sonra muhtasar kitap olarak İbn Fellûs el-Mardînî'nin Niṣâbü'l-ḥabr ve İbn Mahallî el-Mevsılî'nin el-Müfîd'ini verir. Orta tipte (mutavassıt) eser olarak Muzaffer et-Tûsî'nin üçüncü dereceden denklemleri ele alan Kitâbü'ẓ-Ẓafer'ini zikretmesi ise oldukça ilginçtir. Geniş kitap (mebsût) olarak da İbn Mahallî'nin *Câmiʿu'l-uṣûl*'ü ile Ebû Kâmil Şücâ' b. *Eslem'in el-Kâmil*'ini kaydeder. Muhtemelen bu tasnifte, eserlerin ihtiva ettiği bilgilerin mahiyetinden çok hacimleri göz önüne alınmıştır. Taşköprizâde'nin ifadelerinde dikkati çeken diğer bir nokta, İslâm cebirinde aritmetiksel cebir ile geometrik cebir ekollerinin varlığını bilmesidir. Nitekim, "Semev'el cebir meselelerini aritmetikle, Hayyâm ise geometri ile ispat etmiştir" demektedir (Miftâḥu's-saʿâde, I, 391). Daha sonra Batı İslâm âleminin ünlü matematikçisi İbnü'l-Yâsemîn'in Urcûze'sinin ve şerhinin önemini ifade eden Taşköprizâde, arkasından da daha faydalı bilgi için Cemşîd el-Kâşî'nin Miftâḥu'l-ḥisâb'ında üçüncü dereceden denklemlerle ilgili bilgi verirken zikrettiği Şerefeddin Muhammed b. Mes'ûd b. Muhammed el-Mes'ûdî'nin risâlesini kaydeder. Bu bilgiler, 16. yüzyıl Osmanlı cebirinin daha önceki klasik İslâm kültürünün bütün cebir bilgisini

[9] İ. Fazlıoğlu, a.g.m., s. 195-201.

kapsadığını, ayrıca Osmanlı ilim adamlarının ve matematik okuyan öğrencilerin takip ettikleri temel kitapların klasik İslâm cebirinin ulaştığı seviye ile orantılı olduğunu göstermesi bakımından önemlidir.

17. yüzyıl Osmanlı matematiğinde cebirle ilgili telif hareketleri devam etmiş, özellikle medreselerde temel ders kitabı olarak okutulan Bahâeddin el-Âmilî'nin bu ilim dalına özel bir yer ayıran *Ḫulâṣatü'l-ḥisâb*'ı (el-Bahâʾiyye), Hasan es-Suhranî, Tekfurdâğî Mustafa Efendi, Ramazan b. Ebû Hüreyre el-Cezerî, Ömer b. Ahmed el-Mâî el-Çullî gibi âlimler tarafından şerhedilmiştir. Bu şerhlerin yüzlerce nüshasının mevcudiyeti, 17. yüzyıl Osmanlı matematik ve cebirinde, klasik ilim paradigması çerçevesinde de olsa, yoğun bir telif hareketi bulunduğunu göstermektedir.

18. yüzyılda el-Bahâʾiyye geleneğine bağlı cebir anlayışı devam etmiş, Muhammed b. Ahmed b. Hasan el-Gazzî ve Maraşlı Abdürrahim b. Ebû Bekir gibi matematikçiler tarafından bu eser yeniden şerhedilmiştir.[10] Ayrıca yeni yazılan genel hisâb kitapları içinde klasik İslâm cebiriyle ilgili bilgiler daima muhafaza edilmiştir. Aynı yüzyılın entelektüellerinden İbrahim Hakkı Erzurumî (1703–1780), *Marifetnâme* adlı eserinde cebirin astronomi, matematik ve felsefe üzerine tartışmalardaki önemine değinmektedir. *Marifetnâme*'nin daha geniş kapsamlı bir parçası olan *Risâle-i Felekiyye*'de ise İbrahim Hakkı, cebiri astronomi ile bütünleştirmektedir.[11] İbrahim Hakkı'nın çağdaşı Mühendishanenin ilk hocalarından olan Gelenbevî İsmail Efendi (1730–1790) de özellikle cebir ve kalkülüsün ileri durumuna kapsamlı bir bakış sağlamış olması çalışmaları, sistematik yaklaşımları matematik açısından önemlidir.[12]

Osmanlı klasik ilminden Batı ilmine geçiş çizgisinde yer alan ve modern matematik konularından logaritma hakkında çevirisi bulunan Gelenbevî İsmâil Efendi (ö. 1205/1791), Osmanlı dünyasında klasik İslâm cebirinin son ünlü temsilcisi sayılabilir. Bir yenilik getirmemekle birlikte Türkçe telif ettiği *Hisâbü'l-küsûr* adlı eserin dördüncü bölümünde klasik geleneğe bağlı cebir bilgisini sunmuş ve mesâil-i sitteyi incelemiştir. Dikkati çeken nokta Gelenbevî'nin, Cemşîd el-Kâşî'nin *Miftâḥu'l-ḥisâb*'ında mesâil-i sitte dışındaki denklemler hakkında yazacağını vaad ettiği risâleyi

[10] İ. Fazlıoğlu, agm., s. 195-201.
[11] A. Ölmez, "II. Meşrutiyet Devrinde Osmanlı Medreselerinde Reform Çabaları ve Merkezileşme", *Vakıflar Dergisi* 41, (2014), s. 1–14.
[12] A. Ölmez, a.g.m., 1-14.

bulamadığı için üçüncü ve daha üst dereceden denklemlerden bahsedemediğini söylemesidir.[13]

18. yüzyılın sonlarından 20. yüzyılın başlarına kadar imparatorluğun bilim ve eğitime yaklaşımında önemli bir değişim yaşanmıştır. Bu dönem, imparatorluğu modernleştirmeyi amaçlayan ve özellikle mühendislik alanında yüksek öğrenim kurumlarının kurulmasına özel olarak odaklanılan kapsamlı reformlarla nitelendirilmiştir. Mühendislik okullarının kurulması ve bu kurumlarda cebirin rolü, Osmanlı İmparatorluğu'nun matematik ortamında çok önemli bir gelişmeyi temsil etmiştir.[14]

Bu okullar, imparatorluğun askeri ve altyapısal gelişimine katkıda bulunabilecek, teknik açıdan yetenekli yeni bir profesyoneller sınıfı yetiştirmeyi amaçlamıştır. Müfredat, Osmanlı eğitim paradigmasındaki önemli değişimi yansıtan çağdaş Avrupa bilimsel ve matematik öğretilerinden büyük ölçüde etkilenmiştir. Cebir bu okulların mühendislik müfredatında çok önemli bir rol oynamıştır.[15]

Konu, mühendislikteki yapısal hesaplamalar, mekanik ve ölçme gibi çeşitli uygulamalar için gereklidir. Osmanlılar, modern mühendislik uygulamaları için cebirin önemini fark etmiş ve bu kurumlardaki eğitimin temel bir parçası olarak cebiri benimsemiştir. Çağdaş bilgi ve öğretim yöntemlerini getirmek üzere Avrupa ülkelerinden davet edildiler. Bu öğretmenler mühendislik eğitimi için çok önemli olan modern cebirsel kavramların ve tekniklerin tanıtılmasında etkili oldular. Bu bağlamda dikkate değer isimlerden biri, akışkanlar mekaniği ve yapı mühendisliği alanındaki çalışmalarıyla tanınan Fransız matematikçi ve mühendis Claude-Louis Navier'dir. Navier'in kendisi Osmanlı İmparatorluğu'nda öğretmenlik yapmasa da eserleri ve ders kitapları Osmanlı mühendislik okullarının müfredatını önemli ölçüde etkilemiştir. Ayrıca Avrupa'da eğitim görmüş yerel Osmanlı alimleri, Avrupa'daki matematik bilgisinin imparatorluğa getirilmesinde önemli bir rol oynamışlardır. Önemli cebirsel

[13] İ. Fazlıoğlu, a.g.m., 200.

[14] Mustafa Kaçar, "Osmanlı İmparatorluğu'nda Askeri Teknik Eğitimde Modernleşme Çalışmaları ve Mühendishanelerin Kuruluşu (1808'e kadar)", *Osmanlı Bilimi Araştırmaları* II, yay. Haz. F. Günergun, İstanbul 1998, s. 69-137.

[15] Baga, E., *Eş-Şemsiyye fi'l-Hisab Hesab Biliminde Kılavuz*, TYEK, İstanbul 2020

metinleri Osmanlı Türkçesine tercüme ettiler ve bunları yerel eğitim bağlamına uyacak şekilde uyarlamışlardır.[16]

Bu okullarda kullanılan önde gelen cebir kitapları arasında Avrupa eserlerinin çevirileri ve uyarlamaları da vardır. Bu ders kitapları, temel cebir prensiplerinden mühendislik bağlamlarındaki daha ileri uygulamalara kadar bir dizi konuyu kapsamıştır. Bunlar sadece tercüme değildir, aynı zamanda Osmanlı talebelerinin özel ihtiyaçlarına uygun değişiklik ve eklemeler de içermiştir.

Mühendislik okullarının kurulması ve modern cebir eğitiminin başlatılması Osmanlı İmparatorluğu üzerinde kalıcı bir etki yaratmıştır. Bu kurumlar, özellikle askeri mühendislik, bayındırlık işleri ve altyapı geliştirme gibi alanlarda imparatorluğun modernleşmesine katkıda bulunan nesiller boyu mühendisler yetiştirmiştir. Ayrıca bu okullarda cebire ve cebire verilen önem, Osmanlı İmparatorluğu'nun matematik kültüründe önemli bir değişime işaret etmiştir. Bu, geleneksel İslami matematik mirasından daha Avrupa odaklı bir yaklaşıma doğru bir hareketi temsil etmiştir. Bu değişim imparatorluk içindeki daha geniş Batılılaşma çabalarının önemli bir yönüdür.

Genel olarak Osmanlı İmparatorluğu'nun mühendislik okullarının kurulduğu modern dönemi, bölgenin matematik tarihinde dönüştürücü bir dönemdir. Cebirin mühendislik müfredatına entegrasyonu ve Avrupa matematik düşüncesinin etkisi, Osmanlı'nın matematik eğitimine yaklaşımını yeniden şekillendirmiştir. Bu dönemde imparatorluğun modernleşme ve Avrupalı güçlerle rekabet etme çabalarında önemli bir rol oynayan, modern cebir ve uygulamaları konusunda eğitim almış yeni bir Osmanlı mühendis sınıfının ortaya çıktığı görülmüştür. Bu dönemin mirası, cebirin mühendislik ve teknik eğitimde devam eden önemine yansımakta ve bu reformların bölgenin matematiksel ve bilimsel gelişimi üzerindeki kalıcı etkisi vurgulanmaktadır.

Osmanlı İmparatorluğu'nda matematik eğitiminin modernleşmesi, özellikle de mühendislik okullarında cebire verilen önem, akademik çevrenin sınırlarını aşan geniş kapsamlı sonuçlara sahiptir. Avrupa matematik yöntemlerinin benimsenmesi ve

[16] E. Baga, "Osmanlı Klasik Döneminde İstanbul'da Matematik İlimler", *Bilimname*, 45/2, (2021), s. 79–119

mühendislik okullarının kurulması, Osmanlı İmparatorluğu'nda önemli bir kültürel ve entelektüel değişimi temsil etmiştir.[17]

Bu geçiş, Sultan II. Mahmud döneminde yeni okullardan çıkan mühendis kadrosu, imparatorluğun ekonomik ve endüstriyel gelişiminde çok önemli bir rol oynamıştır. İmparatorluğun ekonomik ve askeri yeteneklerini güçlendirme arzusu açısından hayati önem taşıyan demiryolları, köprüler ve modern askeri teçhizat gibi altyapıların inşasında etkili olmuşlardır. Mühendislik okullarının kurulması ve cebire ağırlık verilmesi de Osmanlı toplumunda toplumsal değişime katkıda bulunmuştur. Bu kurumlar sosyal hareketlilik için yollar sağlamış ve imparatorluğun liderliğinin reformist vizyonlarına genellikle daha fazla uyum sağlayan yeni bir profesyoneller ve bürokratlar sınıfı yaratmıştır.

Osmanlı Devleti'nde bu dönemde başlatılan değişiklikler, sonraki yıllarda daha kapsamlı eğitim reformlarının yolunu açmış, bölgedeki teknik ve bilimsel eğitimin yapısını ve içeriğini etkilemiştir. Osmanlı İmparatorluğu'nun dağılmasından sonra, halef devletler bu matematik ve teknik eğitim mirasını devralmışlardır. Osmanlı döneminde kurulan eğitim kurumlarının ve uygulamaların çoğu, bu ülkelerde bilim ve mühendislik eğitiminin gelişimini etkilemeye devam etmiştir. Osmanlı kurumlarında yetişen mühendis ve matematikçiler, yalnızca imparatorluğun gelişmesine değil, aynı zamanda kürese, bilimsel ve teknik bilgi birikimine de katkıda bulundular. Hem İslami hem de Avrupa geleneklerinden etkilenen çalışmaları, çeşitli matematiksel ve bilimsel mirasların eşsiz bir karışımını temsil etmektedir.

2-Osmanlı Devleti'nde Yeni Askeri Okulların Kuruluşu

Yukarıda da ifade edildiği gibi yeni tip okulların kurulması ortaya çıkan 18. yüzyılın başlarından itibaren hissedilmeye başlayan, özellikle kendisini yüzyılın sonuna doğru Rus ve Avusturya cephelerinde uğranılan ağır mağlubiyetler sonucunda, Avrupa tarzında eğitimli ve düzenli bir ordu ve donanma, fenni topçuluk ve askeri sınıflara, teknik eğitime ve dolayısıyla askeri mühendislik bilimine ciddi bir şekilde ihtiyaçtan kaynaklanmıştır. Bu durum bazı ilk adımların atılmasını ve nizam-ı cedid

---

[17] Baga, E., "Osmanlı Klasik Döneminde İstanbul'da Matematik İlimler", *Bilimname*, 45/2, (2021), s. 79–119

devri dahilinde bu ihtiyacın karşılanması için de yeni bir okul kurulmasını zorunlu kılmıştır. Böylece Osmanlı'nın matematiksel gelişimindeki "tarz-ı cedid" üzere yeni bir ekol doğmuştur.

Mühendishane-i Berri-i Hümayun 1795 yılında mühendis yetiştirmek üzere açılmıştır. *Mühendishane-i Bahri*'de olduğu gibi bu mektepte yabancı hocalar istihdam edilmemiştir. Zaten 1787-1788 Osmanlı-Rus savaşı sonrası yabancı hocalar ülkelerine geri çağrılmıştı. Kuruluş sebebi Nizam-ı Cedid ordusunun teşkil edilmesiyle bağlantılıdır. 1795'te Hasköy'de açılmıştır. 1775'te kurulan *Mühendishane-i Bahri-i Hümayun*'dan sonra imparatorluğun ikinci mühendishanesidir. İlk dönemiyle ilgili belgelerde *Fünun-i Harbiyye Talimhanesi*, *Mekteb-i Fünun-i Harbiyye* veya *Mühendishane-i Sultani* gibi isimlerle, ardından da *Mühendishane-i Berri-i Hümayun* olarak adlandırılmıştır. Riyaziye ve Hendese ağırlıklı olarak dersler verilmiştir. Okulun idareciliğini ve baş hocalığını uzun yıllar üstlenen geometri ve cebir hocası Abdurrahman Efendi başkanlığında Türk hocaları (Hüseyin Rıfkı, İbrahim Kami, Hafız Seyyid İbrahim Edhem, Elhac Hafız Abdullah) tarafından yürütülmüştür. Mühendishanede bir matbaa açılmış ve ayrıca bir kütüphane oluşturulmuştur. Mühendishanenin zemin katında açılan matbaa, o sırada başka bir Türk matbaasının olmaması sebebiyle Türk matbaacılığı açısından da önemli bir gelişmeyi gösterir. Derslerle ilgili olarak hazırlanacak telif ve tercüme eserlerinde ayrıca daha ucuz şekilde talebenin istifade edeceği düşüncesi ile matbaa açılmıştır. Mühendishanenin kütüphanesi özellikle Ebubekir Ratib Efendi'nin terekesinden alınan çok sayıdaki kitap, harita, teknik alet ve edevatla zenginleşmiştir. *Mühendishane-i Berri-i Hümayun*, gerek araç ve donanımı gerekse kütüphane ve sair olanakları açısından, 20 yıl önce Tersane'de açılmış bulunan *Mühendishane-i Bahri-i Hümayun*dan çok daha zengin ve mükemmeldi. Matbaası, dökümhanesi ve modern sınıflarda her türlü teknik ve ders araçlarına sahip bulunuyordu. *Mühendishane-i Berri Kütüphanesi*'nde, 1751'de Paris'te neşredilmeye başlanarak 1780'de tamamlanan otuz beş ciltlik meşhur Fransız ansiklopedisine de (*Encyclopedie ou dictionnaire raissone des sciences, des arts et des metiers)* yer verilmiş olması dikkat çekicidir. Mühendishane ve matbaasındaki faaliyetlerin III.Selim'in son dönemlerinde önemli zaafa uğradığı görülmektedir. III.Selim'in tahttan indirilmesi ve Nizam-ı Cedid faaliyetlerine son verilmesi mühendishaneye daha ağır bir darbe indirdi. Temelde askeri birer okul olan mühendishanelerin disiplini de doğal olarak askeri bir disipline dayanmaktaydı.[18]

Yeniçeri Ocağı'nın ortadan kaldırılıp yerine '*Asakir-i Mansure-i Muhammediyye*' (Muhammed'in muzaffer askerleri) adıyla kurulan yeni ordunun çağdaş düzeyde eğitilmesini karşılamak amacıyla mühendislik eğitimi tekrar önem kazandı. *Mühendishane-i Berri Hümayun* ilk mühendislerin yetişmesini ve ilerideki dönemlerde mühendislik hizmetlerinin yabancı mühendislerin hizmete alınmasına ihtiyaç kalmadan karşılanmasını büyük ölçüde sağladı.

3- Mekteb-i Harbiye-i Şahane'nin Kuruluşu

Yukarıda da ifade edildiği üzere 1826 yılında Osmanlı ordusunun temel taşlarından biri olan Yeniçeriliği ilga eden Sultan II. Mahmud (1808-1839) onun yerine kurmuş olduğu *Asakir-i Mansure-i Muhammediye* adlı yeni orduda modern savaş usul ve tekniklerini bilen zabitler yetişmesi maksadıyla 1831 yılında bir askerî mektep kurulmasını kararlaştırmıştır. Avrupa askerî okulları örnek alınarak kurulan 400 talebe kapasiteli bu okul, *Mekteb-i Harbiye-i Şahâne* adıyla 1834 yılında Maçka Kışlası'nda öğretime başlamıştır. Başına da Avrupa'da tahsil görmüş olan Namık Paşa getirilmiştir.[19]

Mekteb-i Harbiye'de eğitim programı taburlar halinde sekiz sınıfa ayrılmış ve her sınıfın ayrı ayrı ve birbirinden bağımsız ders yapması öngörülmüştür. Ders programları Kara ve Deniz mühendishânelerinin hocaları tarafından düzenlenmiştir. Bunun ötesinde bu okulların ihtiyacını karşılamak maksadıyla da Viyana ve Paris gibi Avrupa başkentlerine hoca olarak eğitilmek üzere talebe ve zâbitler gönderilmiştir.

1838'de nâzırlığa getirilen Emin Paşa, mektebi iki kısma ayırmıştır. Bunlardan birincisi dört yıllık yüksek kısım olan *Mekteb-i Fünûn-ı Harbiye*, diğeri ise üç yıllık *Mekteb-i Fünûn-i İdadîye* adlı hazırlık kısmıdır. Emin Paşa'nın nâzırlığı döneminde, Avrupa'da tahsilini tamamlayıp dönenlerin ve Avrupalı uzmanların hoca olarak istihdam edilmesiyle öğretmen sayısı arttırılmıştır. 1848'de mektebin nâzırlığına

[18] Acar, Ş., Bir, A., Kaçar, M. "Osmanlıda Sivil Mühendis Yetiştirmek Üzere Açılan Hendese-i Mülkiye Mektebi", *Osmanlı Bilimi Araştırmaları,* 17 (2016), s. 9.

[19] Gülşah Eser, *Mekteb-i Harbiye'nin Türkiye'de Modern Bilimlerin Gelimesindeki Yeri (1834-1876)*, İÜ. Sosyal Bilimler Enstitüsi, Bilim Tarihi Bilim Dalı, İstanbul 2005, s. 93, 99, 100.

getirilen ve yine tahsilini Avrupa'da tamamlamış olan Kimyager Derviş Paşa, Fransız askerî okulu St. Cyr'den ilham alarak, Mekteb-i Harbiye'yi tamamen bir Avrupa modeli üzerine yeniden teşkilatlandırmıştır. 1846'da bu mektebe ilave olarak ordunun veteriner ihtiyacını karşılamak üzere İmparatorluğun ilk modern veterinerlik eğitimini verecek olan *Baytar Mektebi* de açılmıştır.[20]

Bostanîzâde Tahir Paşa'nın ders nazırı olduğu ve cebir dersi verdiği Harbiye mektebinde cebir eğitimi ile ilgili olarak birinci bölümde etraflı bilgi verileceği için burada sadece mektebin kuruluşuna kısaca temas etmekle yetinilmiştir.

---

[20] E. İhsanoğlu, "Osmanlı Eğitim ve Bilim Müesseseleri", *Osmanlı Devleti ve Medeniyeti Tarihi*, c. 2, İstanbul 1998, s.223-361.

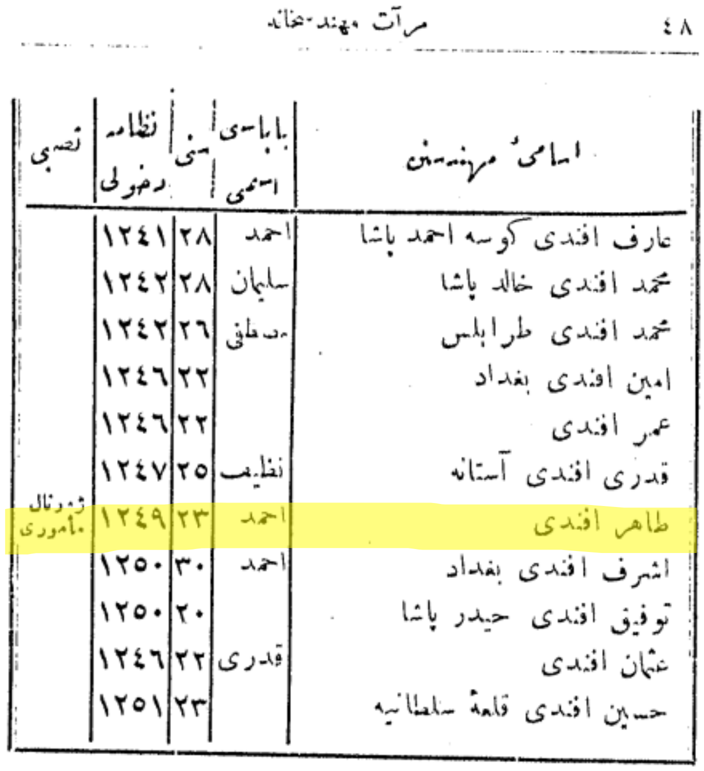
BİRİNCİ BÖLÜM

1.1. BOSTÂNÎZADE TAHİR PAŞA'NIN HAYATI VE ESERLERİ

1.1.1. Bostanizâde Mehmed Tahir Hayatı

Küçük Tahir Paşa ve Hoca Tahir Paşa olarak da bilinen Bostanîzâde Mehmet Tahir (Doğum tarihi H.1226/1811-12, Ölüm tarihi 1298/1880-81), bir Osmanlı matematikçisidir. 19. yüzyılda Osmanlı bilim dünyasında adından söz ettiren bu değerli şahsiyet, askeri mekteplerde matematik eğitimi ve yazdığı kitaplarıyla cebir, geometri ve mekanik alanlarında eser kaleme almıştır. İlk eğitimi hakkında bir malumat yoktur.

Tahir Paşa'nın eğitimine ilişkin bilgilere ilk olarak Mehmed Esad tarafından 1984 tarihinde bastırılan Mirat-ı Mühendishane adlı eserden ulaşıyoruz. Buradaki bilgilere göre Mehmet Tahir Efendi, Mansure Mühendisleri listesinde:



٤٨ مرآت مهندسخانه

اسامئ مهندسين	باباسی اسمی	سنی	نظامه دخولی	نصبی
عارف افندی كوسه احمد پاشا	احمد	٢٨	١٢٤١	
محمد افندی خالد پاشا	سليمان	٢٨	١٢٤٢	
محمد افندی طرابلس	مصطفى	٢٦	١٢٤٢	
امين افندی بغداد		٢٢	١٢٤٦	
عمر افندی		٢٢	١٢٤٦	
قدری افندی آستانه	نظيف	٢٥	١٢٤٧	
طاهر افندی	احمد	٢٣	١٢٤٩	ژورنال مأموری
اشرف افندی بغداد	احمد	٣٠	١٢٥٠	
توفيق افندی حيدر پاشا		٢٠	١٢٥٠	
عثمان افندی	قدری	٢٢	١٢٤٦	
حسين افندی قلعهٔ سلطانيه		٢٣	١٢٥١	

Tahir Efendi: Baba adı: Ahmed Nizama Duhulü: 1246 Nasbı: Jurnal Memuru

Olarak geçmektedir. Buradan 1833 yılında Mühendishane-i Berri-i Hümayun'a girmiş ve kendi sınıfında jurnal memuru[21] tayin edilmiştir.[22] Daha sonra 1250-51/1835 yıllarında tahsil için İngiltere'ye gönderilen mühendishane talebeleri arasında Tahir Efendi de bulunmaktadır. Burada Tahir Efendi hakkında kısa bir de biyografi bulunmaktadır.[23]

Her nekadar Tahir Bey'in İngiltere'de hangi okula gittiği ve kimlerden ders aldığı hâlâ gizemini korusa da bu deneyimin, onun eğitim ve akademik çalışmalarında askerî okullarda görev almasına katkıda bulunduğu aşikârdır. Talebesi Vidinli Tevfik Paşa'nın hocası Tahir paşa'nın şahsiyeti ve İngiltere'deki eğitimi hakkıdaki ifadeleri bu konuda fikir verebilir.

> "Muallimim olduğu için söylemiyorum. Hakikatin kendisi olduğu için söylüyorum ki cidden İngiltere'de pek iyi tahsil görmüş, okuttuğu dersi pek iyi biliyor ve pek güzel anlatıyor idi. Ben kendisinden çok istifade ettim. Bundan dolayı ruhuna ne kadar rahmet okusam azdır."[24]

Mirliva rütbesine kadar yükselen Paşa, 1880-81 yılında 69-70 yaşında hayatını kaybetmiştir. Özellikle Mekteb-i Harbiye'de matematik öğretmeni olarak görev yapması, onun bilgi ve tecrübesinin yeni nesillere aktarılmasında kritik bir rol oynamıştır. Burada yetiştirdiği öğrenciler arasında, yukarıda da bahsettiğimiz gibi Osmanlı'nın yetiştirdiği en büyük matematikçilerden biri olarak kabul edilen Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa da bulunmaktadır.[25]

Dönemin *Salname*lerini[26] incelediğimizde Tahir Paşa'nın adına ilk olarak 1280 (M.1867) *Salname*sinde "Mekteb-i Harbiye" öğretim kadrosunda rastlamaktayız.

---

21 Jurnal Memuru: Kalemlerde memurînin mevcud ya da gayr-i mevcud olduklarını defterine kaydeden memur, Bkz. *Yeni Tükçe Lugat*, https://www.osmanlicasozlukler.com/turkcelugat/tafsil-251477-kv1.html

22 Mehmed Esad, *Mirat-ı Mühendishane-i Berrî-i Hümâyûn,* İstanbul 1312/1894, 47-48.

23 Mehmed Esad, Tahir Efendi ile ilgili şunları yazmaktadır: "Mekteb-i Harbiye muallimliği ve ders nazırlığı sebk eden Mirliva Küçük Tahir Paşadır. İrtihâli 1284 tarihindedir. İlm-i cebr ve Cerr-i eskal ve kozmografya namıyla müfid eserleri vardır." Mehmed Esad, *Mirat-ı Mühendishane-i Berrî-i Hümâyûn,* s. 64-65.

24 *Osmanlı Astronomi Literatürü Tarihi,* ed. Ekmeleddin İhsanoğlu, C.II 1997, İslâm Tarih, Sanat ve Kültür Araştırmaları Merkezi, İstanbul, s. 608.

25 *Osmanlı Matematik Literatürü Tarihi,* ed. Ekmeleddin İhsanoğlu, C.I, 1999, İslâm Tarih, Sanat ve Kültür Araştırmaları Merkezi, İstanbul, s. 311.

26 Salnameler hakkında bkz. Osmanlı Devleti'nde merkezî yönetimin, nezâretlerin, askerî kurumların, vilâyetlerin, bazı özel kurum ve kişilerin yıllık olarak çıkardıkları bilgilendirme amaçlı neşriyata sal-nâme adı verilmişti. Devlet Salnâmelerinden ilk *salnâme* 1263 (1847) yılında Mustafa Reşid

Miralay Tahir Bey'in "*Cebr-i Âlâ*", "*Cerr-i Eskâl*", "*Müsellesât-ı Müsteviye*", "*Kutu'-i Mahrûtiyyat*" ve "*Müsellesât-ı Küreviyye*" derslerine girdiği görülmektedir.[27] 1281 salnamesinde Mekteb-i Fünûn-u Harbiye Hazret-i Şahane öğretim kadrosu içerisinde ders nazırı ve ikinci nazır Mirliva (*Tümgeneral*) Tahir Paşa'nın Ulûm-i Riyâziye'den "*Cebr-i Âlâ*" ve "*Müsellesat-ı Müsteviye*" ve "*Kozmografya*" hocası olduğu görülmektedir.[28]

1282/1866 *Salnamesi*nde Ferik Galip Paşa Mekteb-i Askeriye nazırı olunca, Mirliva Tahir Paşa ders nazırlığı yanında "'Ulûm-ı Riyâziye'den *Cebr-i Âlâ*", "*Kozmografya*" ve "*Müsellesat-ı Müsteviye*" hocalığına getirildiği kaydedilmiştir.[29] 1283/1867 yılında Tahir Paşa Mekteb-i Harbiyede aynı görevi devam ettirmektedir.[30] 1284 yılında ise Mekteb-i Fünûn-ı Harbiye-i Hazret-i Şahane öğretim kadrosu içerisinde sadece ders nazırı olarak kayıtlı iken[31] "*Cebr-i Âlâ*" ve "*Müsellesat-ı Müsteviye*" derslerine Süvari Mülazım-ı Evveli Nuri Bey (muavin)'in girdiği görülmektedir. 1285 yılında Mirliva Tahir Paşa, "Mekteb-i Fünûn-ı Harbiye-i Hazreti Şahane" öğretim kadrosu içerisinde halâ ders nazırı olarak görülmektedir. Aynı şekilde 1286 yılında da Mekteb-i Harbiye-i Şahane'de bulunan Ümara ve Zabitan kadrosunda ders nazırı olarak görülüyor.[32] 1287 *Salname*sinde ise Mekteb-i Harbiye-i Şahane'de bulunan Ümara ve Zabitan kadrosu içerisinde Tahir Paşa'nın adına rastlamıyoruz.[33] Yerine ikinci ders nazırı olarak Mirliva Şevket Paşa tayin edilmiştir. Ulûm-i Riyâziye hocalığına Erkân-ı Harbiye kolağası Osman Efendi getirilmiştir. 1287 yılında Tahir Paşa'nın emekliliğe ayrıldığını söyleyebiliriz. Mekteb-i Harbiye günlük çalışma

Paşa'nın öncülüğünde çıkarılmıştır. 1263-1327 (1847-1912) yılları arasında düzenli biçimde basılabilmiş, 1328-1332 (1912-1916) arasında savaş yüzünden yayımlanamamıştır. Sonuncusu 1334 r. (1918) tarihini taşıyan devlet salnâmelerinin Cumhuriyet döneminde yayımına devam edilmiş, ilk ikisi *Türkiye Cumhuriyeti Devlet Salnâmesi* ismiyle 1925-1926 ve 1927-1928 yıllarında Arap harfleriyle, üçüncüsü *Türkiye Cumhuriyeti Devlet Yıllığı* adıyla 1928-1929 yıllarında Latin harfleriyle basılmıştır. Altı sayı neşredilen bu yıllıkların sonuncusu 1941 tarihlidir. Bilgin Aydın, *TDVİA*, C. 36, 2009, s. 51-54.

27 Gülşah Eser, *Mekteb-i Harbiye'nin Türkiye'de Modern Bilimlerin Gelimesindeki Yeri (1834-1876)*, İÜ. Sosyal Bilimler Enstitüsi, Bilim Tarihi Bilim Dalı, İstanbul 2005, s. 93, 99, 100.

28 *Salname-i Devlet-i Aliyye*, Defa 19, Yıl 1281, s.78.

29 *Salname-i Devlet-i Aliyye*, Defa 20, Yıl 1282, s.62; Gülşah Eser, ag.t. s. 93.

30 Gülşah Eser, a.g.t. s. 93.

31 *Salname-i Devlet-i Aliyye*, Defa 22, Yıl 1284, s.75; Gülşah Eser, ag.t. s. 93.

32 *Salname-i Devlet-i Aliyye*, Defa 24, Yıl 1286, s.95.

33 *Salname-i Devlet-i Aliyye*, Defa 25, Yıl 1287, s.102.

plânında Sınıf-ı Râbi'de cumartesi ve salı günleri saat 9-10'da Cebir, Müsellesat-ı Müsteviye ve Küreviye dersleri olduğu görülmektedir.[34]

1.2. BOSTANÎZÂDE TAHİR PAŞA'NIN ESERLERİ:

1.2.1. Müsellesat-ı Cebriye (*Cebirsel Trigonometri*), Müsellesat-ı Müsteviye ve Küreviye olarak bilinen eseri:

Tahir Paşa'nın Sultan Abdülmecid Han zamanında Mekteb-i Haribiye'de kaymakam rütbesiyle riyaziye mualllimi olarak göreve başladığında vermiş olduğu derslerle ilişkili olarak " **Müsellesat-ı Cebriye** *(Müsellesat-ı Müsteviye ve Küreviye)*" adlı eserini hazırlamıştır. Mekteb-i Harbiye Litografya matbaasında basılmıştır. Eserin dibacesinde:

Tesis ve bina buyrulan Mekâtib-i İdadiye ve Fünuniye'den Mekteb-i Harbiye-i Hazret-i Şahaneye kaymakamlık rütbe-i bahirün meymenesiyle hendese hocası nasb buyrulan bu müstağrak-ı nimet-i şehinşahi Mir Mehmed Tahir kulları men gayr-i liyakata nail ve mazhar olduğum eltaf-ı pür berakâtın eday-ı teşekkür ve mahmudumuza kusur-ı bendagenem derkâr ise de ala vesiyyü'l taka bezl-i makderet birle mukaddem Mühendishane-i Berri-i Hümayun canibinden İngiltere'ye memur buyrulduğum ecilden ol tarafta olan şecere-i tahsilimden bir semere ve bundan böyle inşallahu Teala ol müceddet kavanin-i devlet ve vefk-i müsellesi şevket padişah-ı adalet siret es-Sultan ibn-i Sultan ve'l Hakan ibnü'l Hakan es-Sultan Abdülmecid Han İbn-i Sultan el-gazi Abdülhamid Han ebed Allah-u mülkehu ve saltanatıhu ila ahirü'z-zaman efendimiz hazretlerinin saye-i ihsan vaye-yi Cenab-ı Şahanelerinde vukua gelecek tercümelerine mukaddeme olmak üzere usul-ı müsellesat-ı müsteviye ve küreviye ve ceyb cetvellerinin kavaid-i cebire tatbiken tarik-i istihraç ve istimaline dair olan iş bu risale-i muhtasara İngiliz lisanından lisan-ı Türkîye tercüme ve tenkıh birle *müsellesat-ı cebriye (Cebirsel Trigonometri)* namıyla tevsim ve birkaç makaleye taksim ve her bir makale çend madde üzerine tertib ve tasmim ve mahaline nazaran bazı emsile-i mukteziye dahi irad olunmuştur. Lakin her bir ilmin mukaddemesi ve hudud ve tağrifatı ve fevaid-i sairesi kaydı? icabından ise de ancak risale-i mezkure müntehi olan talibine mahsus ve muktezi olan mukaddime ve mevzuat-ı lazime kütüb-

[34] Gülşah Eser, a.g.t. s. 136.

i saire-i hendesiyede mastur olmakla bu mahalde tekraren serd ü beyânını hasıl-ı tahsil kabilinden olduğundan etnabdan içtinab kılınarak nimem-i nazar-ı hazret-i tacidâri buyrulmak ümidiyle ma taksir ber vezişte-i desti müberreat kılınmıştır. Ve Allah ve-lil Tevfik.

İngiltereden döndükten sonra bilgilerini fen ve matematik alanında tercüme eserler hazırlamak ve talebelere faydalı olmak üzere kullandığını ve eserinin adını *Müsellesat-ı Cebriye* koyduğunu ifade etmektedir.

1.2.2. Usul-i Cebr:

Tahir Paşa'nın "*Usul-i Cebr*" isimli ikinci eseri cebirin temel kavramlarını ve problem çözme tekniklerini ele alıp dönemin matematik eğitimi ve araştırmalarında cebirin önemini vurgulamakta ve bu alandaki bilgi birikimini zenginleştirmektedir. Eser 1266/1849-1850 ve 1278/1861-1862 ve 1288/1871-1872 senelerinde üç kez basılmıştır. Eserde sunulan cebirsel kavramlar ve çözüm yöntemleri, matematiksel düşünceyi geliştirmek ve karmaşık problemleri çözmek için önemlidir. "*Usul-i Cebr*" eseri, cebir alanında önemli bir başvuru kaynağı olarak kabul edilir. Kitap, adından da anlaşılabileceği gibi, cebirsel kavramlar ve problemler üzerine yoğunlaşmış ve bu alanda derinlemesine bir inceleme sunmuştur. Bu eser Tahir Paşa'nın cebir alanındaki ustalığını göstermektedir ve dönemin matematik eğitiminde önemli bir yere sahip olmuştur. Eser hakkında daha geniş bilgi ikinci bölümde verilecektir.

1.2.3. İlm-i Cerr-i Eskal:

Tahir Paşa Sultan Abdülmecid Han zamanında Mekteb-i Harbiye'de miralay iken verdiği derslerle ilişkili olarak "*İlm-i Cerr-i Eskal*" adlı eserini hazırlamış ancak sultanın vefatı (26 Haziran 1861) sebebiyle eserini Sultan Abdülaziz zamanında, 1279/1862 senesi safer/ağustos ayı sonlarına doğru, Mekteb-i Harbiye Litografya Matbaası'nda bastırabilmiştir. 304 sayfa ve 6 levhalık eser, mukaddime, iki kısım ve hatimden oluşmakta, birinci kısmı "Sukûnet-i Ecsâm", ikinci kısmı ise "Haretket-i Ecsam" başlıklarını taşımaktadır. Mukaddim ve Hatime aynı şekilde modern fizik-mekanik konularını ihtiva etmektedir.

Tahir Paşa bu eserin girişinde Hz. Muhammed (s.a.s.): Hz. Ali ve Hz. Fatima soyundan gelenler için kullanılan *Seyyid* nisbesini kullanmış ve adını Seyyid Mehmed Tahir olarak yazmıştır. Mukaddimede kitabını yazma gerekçesini şu şekilde ifade ettmektedir.

> "Es-Seyyid Mehmed Tahir, bir nice evkâtten beri tercüme ve telifi husûsunda sa'y -ı gûşet ve cehd ü verzîş etmekte olduğum 'ulûm-ı riyaziyeden ilm-i cebr ve 'ulûm-ı müsellesât-ı müsteviye ve küreviye saye-i hümâyûnvâye-i cenâb-ı zıllullâhide akdemce rehîn-i hayyiz-i ikmâl ber muktezây-ı irâde-i seniyye tab' ve neşr ile elân Mekatib-i askeriye ve rüştüyede ta'lîm ve tedris olunmakda iken 'ulûm-i mezkûreden olan 'ilm-i cerr-i eskal Mekteb-i Harbiye'nin ibtiday-ı nizâmından beri tedrîs olunmakta ise de şâkirdân bendelerinin yedlerinde bir nüsha-i matbuası olmayup esnây-ı derste bazıları zabt edebildikleri şeyleri kaleme almakta olarak Mekteb-i Harbiye'nin dersleri müteaddid olmakla şakirdânın mecmua tertibine vakitleri kalmadığından ekserisi nüshadan mahrûm olageldikleri meczûm-ı bendegânem olup şu mahzûrun def'î le beraber mâkâtib-i sâire şakirdânına naf'î olmak mülâhazâsıyla işbu risâle-i muhtasaranın cem' ve te'lîfine mübâderet kılınmışdı.

Tahir Paşa bu eserini hazırladıktan sonra Mekteb-i Harbiye topçuluk fenni muavini ve ulûm-ı riyâziye hocası İsmail Hakkı Hoca tarafından basım öncesi tashih edilmiş olduğu anlaşılmaktadır.[35]

1.2.4. Fenn-i Kozmografya:

Tahir Paşa'nın *Fenn-i Kozmografya* adlı eseri 1280/1863 İstanbul'da basılmıştır. E. Fehmmi Karatay kataloğunda eserin adı *'ilm-i heyet* adıyla, aynı şekilde Tahir paşa'nın vefat tarihi de 1867 olarak verilmiştir. Bu tarih hatalıdır (muhtemelen matbaadan kaynaklanmıştır).[36] Ancak ne yazık ki bu hata birçok muahhar araştırmada hiçbir inceleme yapılmadan aktarılmıştır.

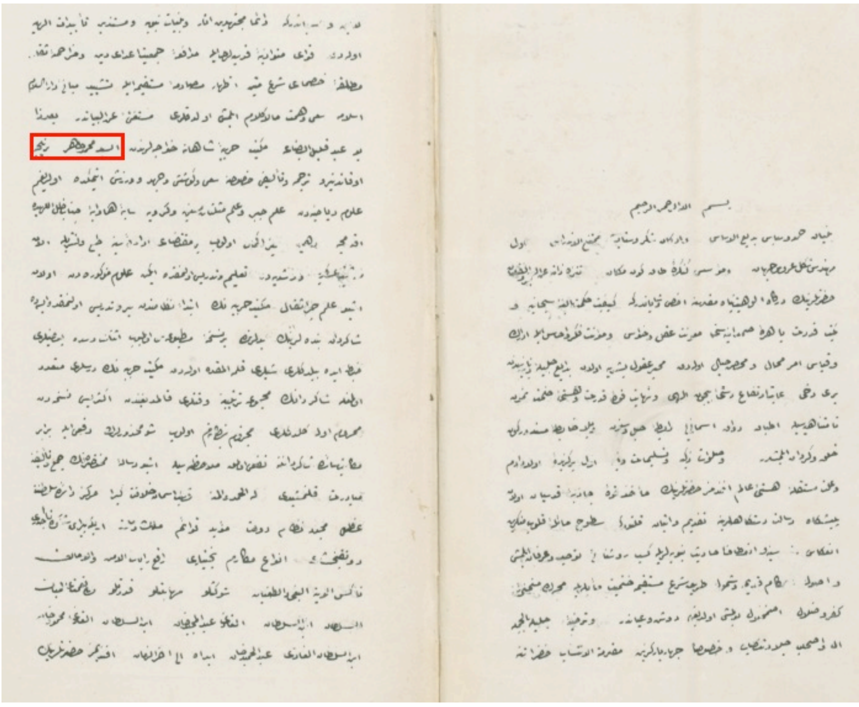
---

[35] Mehmed Tahir, *İlm-i Cerr-i Eskal*, Mekteb-i Harbiye, 1279, "mukaddime"

[36] E.F. Karatay, *İstanbul üniversitesi kütüphanesi Türkçe basmalar alfabe katoloğu : memleketimizde ilk Türk matbaasının kuruluşundan yeni harflerin kabulüne kadar (1729-1928),* c. 2, İstanbul 1956, s.785.

Eserin künyesi: F*enn-i Kozmografya*, Mekteb-i Harbiye Litografya Matbaasında 1279 senesinde basılmıştır. Dibacesinde:

> (ba'ade za) Asâr-ı celîle-i asr-ı pür nasr-ı hazret-i şehinşahiden olan mekâtib-i idadiye-i cenâb-ı mülükânlerini bu def'a yeniden ihyâ buyurdukları ecilden nizâmât-ı tedrisiyesinin dahi ta'dîl ve tesviyesi sırada yeniden bazı fennin 'ilâvesi lâzım gelmiş ve fenn (Kozmografya) dahi bu kabiîden bulunmuş olmakla bu 'abd-i kalîlü'l-buzaa Mekteb-i Fünûn-ı Harbiye-i Şahane hocalarından Mehmed Tahir kulları bir nice evkattan beri te'lif ve terkibi hususuna sarf-ı makdûr ve sa'y nâ mahsûr etmekte olduğum fenn-i hey'etten işbu (Fenn-i Kozmografya) bundan akdem tab' ve temsil olunan ve elân Mekteb-i Harbiye-i Şahane şakrdanı kullarına ta'lim ve tedrîs olunmakda olan 'ulûm-ı riyaziyeden 'ilm-i cebr ve 'ilm-i müsellesât-ı müsteviye ve küreviye ve cerr-i eskal fenlerine dair olan te'lifât-ı 'acizâneme 'ilâve olmak üzere ……. Sultan (Abdülaziz Han) efendimiz hazretlerinin saye-i hümavaye-i zıllahilerinde işbu risale-i muhtasara karin-i hayyiz-i hitam olmuş olmağın… [37]



Fenn-i Kozmografya İÜ. Nadir Eserler Kütüp. No: TY 222.

İfadesinden, Sultan Abdülaziz Han'ın Mekteb-i Harbiye'de yeni bir düzenleme yaparken bazı yeni dersler de ilave edilmiş ve bu çerçevede Tahir Paşa'da Astronomi alanında Fenn-

[37] Mehmed Tahir, *Fenn-i Kozmografya,* Mekteb-i Harbiye, 1280/1863, "mukaddime".

i Kozmografya adlı bu en son eserini hazırlamıştır. Yine bu eserin sonunda kitabın 1280/1863 yılının Rebiülahir /eylül ayında basılmış olduğu kayıtlıdır.[38]

1.2.5. Hesab Kitabı:

Bu eseri, Paşa'nın eğitimci kimliğinin güçlü bir kanıtıdır. Bu ders kitabı, matematik eğitiminin temel konularını ve uygulamalarını öğrencilere sunmaktadır. Kitabın içeriği, öğrencilerin matematiksel düşünme yeteneklerini geliştirmeyi amaçlamakta ve bu yönüyle dönemin eğitim anlayışına yeni bir soluk getirmektedir. "*Hesab Kitabı*", dönemin eğitim sistemine yönelik bir yenilik olarak görülebilir. Bu kitap, matematiğin temel prensiplerini ve hesap yöntemlerini öğrencilere sunarak, onların matematiksel düşünme ve problem çözme becerilerini geliştirmeyi hedeflemiştir. Özellikle "*Hesab Kitabı*", matematik eğitiminin temelini oluşturan bir eser olarak dikkat çeker. Bu ders kitabı, matematiksel konseptleri ve hesaplama yöntemlerini öğrencilere anlaşılır bir şekilde sunarak, onların matematiksel düşünme yeteneklerini geliştirmeye odaklanmıştır. Kitabın pratik uygulamalara verdiği önem, öğrencilerin teorik bilgileri günlük hayatta nasıl kullanabileceklerini göstermek açısından değerlidir.

Hesap Kitabı, birinci kısmı 71 sayfa olarak 1311/1893 Karabet Matbaasında basılmıştır. İkinci kısmı ise aynı matbaada 1313/1895 yılında 79 sayfa olarak basılmıştır.[39]

Tahir Paşa; kozmografya, mekanik ve fizik gibi alanlarda da çalışmalar yapmış olmasına rağmen, gerçek ilgi alanı matematikteki başarılarıyla öne çıkmaktadır. Bu başarıları, onun sadece bir öğretmen ve bilim insanı olmanın ötesinde, bir yenilikçi ve öncü olduğunu göstermektedir. Onun matematikteki katkıları, o dönemde Osmanlı Devleti'nin bilim ve eğitim alanında Batı dünyasıyla entegre olma çabalarının bir parçası olarak görülebilir. Batı'da aldığı eğitimi kendi ülkesine taşıyan ve burada uygulayan Tahir Paşa, modern bilimsel düşüncenin Osmanlı'ya adaptasyonunda önemli bir köprü vazifesi görmüştür. Öğrencilerine aktardığı bilgiler ve yöntemler,

---

[38] Mehmed Tahir, F*enn-i Kozmografya*, s.126.

[39] Atilla Polat, *19. Yüzyıl Osmanlı Bilim Hayatında Öncü Bir Matematikçi: Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa*, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bilim Tarihi Bilim Dalı, İstanbul 2014.

Osmanlı'da bilimsel ve teknolojik gelişimin temellerinin atılmasına yardımcı olmuştur.[40]

Bostanîzâde Tahir Paşa'nın ölümünden sonra dahi, onun eserleri ve öğretim metodları, Osmanlı eğitim sisteminde ve bilim dünyasında uzun yıllar etkili olmuştur. Osmanlı matematik tarihinde silinmez bir iz bırakan Paşa, Eyüpteki bir türbede son yolculuğuna uğurlanmıştır.

Tahir Paşa'nın Kabri
Eyüp Sultan'da Sebil ile Hüsrev Paşa Kütüphanesi arasındaki Mihrişah Valide Sultan hazirsinde medfundur. (Foto: Sultan Tekin-Temmuz 2024)

Tahir Paşa'nın Avrupa'da Cambridge Üniversitesi'nde matematik öğrenimi görmüş ilk matematikçimiz olan *Mühendishane-i Berri Hümayun*'un ilk başhocası matematikçi ve astronom Hüseyin Rıfkı Tamani'nin oğlu Emin Paşa, ile aynı okula

---

40 Ceyhan, O.T. (2020). Klasik Dönem Osmanlı Matematiğinde Pîr Mahmud Sıdkı Edirnevî'nin "Çift Yanlış" Metodu, *Erdem*, Sayı 79, 149 – 174.

devam ettiği söylenmekte ise de burada öğrenim gördüğüne dair bir kayda rastlanmamıştır.[41]

Onun öğrencisi olarak yetişmiş ve sonrasında Osmanlı bilim dünyasında tanınmış matematikçi Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa Tahir Paşa'nın bilimsel mirasını devam etmiştir. Tahir Paşa'nın eserleri, günümüzde hala matematik tarihi çalışmalarında önemli bir kaynak olarak kabul edilmektedir. Onun metodolojik yaklaşımları ve analitik düşünce yapısı, modern matematik eğitiminin temellerini oluşturmuştur. Bu eserler, aynı zamanda 19. yüzyıl Osmanlı matematiğinin anlaşılması açısından da kritik öneme sahiptir. Genel olarak Tahir Paşa, Osmanlı Devleti'nin 19. yüzyılda yaşadığı bilimsel ve eğitimsel dönüşüme önemli katkılarda bulunan, matematik alanında derin izler bırakmış bir bilim insanı ve öğretmendir. Onun çalışmaları, Osmanlı bilim tarihinin yanı sıra, genel matematik tarihi içinde de önemli bir yere sahiptir.[42]

Atilla Polat'ın *19. Yüzyıl Osmanlı Bilim Hayatında Öncü Bir Matematikçi: Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa* adlı tezinde *Zeyl-i Usul-i Cebir* bölümünde Mekteb-i Harbiye matematik hocalarından Bostanîzâde Tahir Paşa'nın üç defa basılan *Usul-i Cebir* kitabının ikinci ve üçüncü baskılarına Hüseyin Tevfik'in zeyl yazdığını belirtmektedir. Polat, Hüseyin Tevfik Paşa'nın daha kapsamlı ve eksikleri giderilmiş olduğundan üçüncü baskıya yapılan zeyli incelemeyi tercih etmiş ve zeylin önsözünde amacını etraflıca açıklamaktadır.

> "Mekteb-i Fünun-i Harbiye-i Şahane'de erkan-ı harb sınıfı şakirdanına tedris olunan fenn-i taksim-i arazi ve heyet ile ilm-i makinenin usul ve kavaidini layıkıyla izah ve ifham hususunda cebr-i adinin gayr-i kâfi olduğu cihetle hoca-i faziletmendimin müellefat-ı celilesinden olan usul-i cebr nam kitab-ı müstatabın ikinci nüshasına yine ondan ahz u iktibas edebildiğim bazı mebahisi şamil bir zeyl ilave etmiştim. Bu defa kitab-ı mezkurun üçüncü defa yeniden tab olunduğunu fırsat addederek mücerred[en] ihvana bir yadigâr olsun niyet-i halisesiyle zeyl-i mezkûr bir hayli ıslah ve tadil ve bazı bil-lüzum görünen

[41] Atilla Polat, a.g.t., s.145.
[42] Değirmendere, M. (2009). Kuyucaklızâde M. Âtıf ve Matematiğe Dair *Nihâyetü'l-Elbâb Fî Tercemeti Hulâsati'l-hisâb*" Adlı Eseri (Metin ve Değerlendirme), Yüksek Lisans Tezi, 1 – 520.

> mevadd bit-terk, ehemmiyeti derkar olan birçok mebahis-i nafıa dahi derç ve tezyil ile bir risalecik şekline konuldu." [43]

Yukarıdaki metinden anlaşıldığı kadarıyla Hüseyin Tevfik Paşa, Mekteb-i Fünun-ı Harbiye'de kurmay sınıflarına okutulan, "fenn-i taksim-i arazi" (jeodezi/yer ölçümü) ve "heyet" (astronomi) dersleri ile "ilm-i makine" (mekanik) dersinin iyi bir şekilde anlaşılabilmesi için temel cebir bilgisinin yeterli olmadığını düşünmektedir. Tevfik Paşa, Bostanîzâde Tahir Paşa'nin *Usul-i Cebir* kitabına bu zeyli yazmasındaki temel amacını, adı geçen dersleri gören öğrencilerin cebir bilgilerini arttırmak ve bu sayede bu derslerin daha iyi kavranmasını sağlamaktır şeklinde ifade etmektedir.

Aynı şekilde Salih Zeki Bey de Hüseyin Tevfik Paşa'nın bu zeyline;

> "Tahir Paşa merhumun Usul-i Cebir'i muhtasaran cebr-i aliden bahseder olması, Vidinli'yi cebr-i aliden kâfi derecede malumatı havi böyle bir zeyl tahririne mecbur etmiştir. Bu zeylin mündericatını Tahir Paşa yazamaz mı idi? Şüphe yok yazardı fakat yazmadı. Çünkü bu şerefi kendi şakird-i irfanı olan ve hakikaten yetişmekte bulunan Vidinli'ye bırakmak istiyordu. Vidinli Tevfik Bey'in bu zeyli kendisini tanıtmak, mektep şakirdanı meyanında şöhret-i azimesine sebep olmuştur denilebiliyor."[44]

*Usul-i Cebir'*in üçüncü baskısına Hüseyin Tevfik Paşa'nın yazmış olduğu zeyilde konular toplam 99 maddede işlenmiştir. Aslında Tahir Paşa, Hüseyin Tevfik'in gayret ve becerisini fark etmiş, öğrenciliği yıllarında Mekteb-i Harbiye'nin erkân-ı harp sınıfına ayrıldıktan sonra bazı günler hocasının derslerine vekâleten dahil etmiştir.[45] Polat'ın tezine göre Hüseyin Tevfik Paşa'yı matematik çalışmalarına hocası Bostanîzâde Tahir Paşa yönlendirmiş ve onun hayatında önemli bir yere sahip olmuştur.

---

[43] Atilla Polat, a.g.t , s.47.
[44] Atilla Polat, a.g.t , s.47.
[45] Tahir Paşa'nın Usul-i Cebir kitabına yazmış olduğu zeylin önsözünde Hüseyin Tevfik'in hocasına teşekkür ettiği ve kendisinden övgüyle söz ettiği görülmektedir.

İKİNCİ BÖLÜM

2. USÛL-İ CEBR KİTABININ SADELEŞTİRİLMESİ

2.1. USÛL-İ CEBR KİTABININ SADELEŞTİRMESİNDE KULLANILAN YÖNTEM:

Eserin transliterasyonu tamamlandıktan sonra günümüz okuyucularının anlamasına yönelik olarak eserin sadeleştirilmesinde basit bir yöntem kullanılmıştır. Esas amaç, yaklaşık 175 yıl sonra tekrar ele alınan Tahir Paşa'nın *Usûl-i Cebr* kitabını günümüz ve gelecek nesillerin okuyup anlamasını, araştırmacıların değerlendirme yapmasını sağlamaya yöneliktir. Sadeleştirmeyi yaparken, öncelikle transkript alfabesi oluşturulmuştur. Zira esas metinde geçen Osmanlıca inisiyallerin yeni Türkçe Alfabesi karşılıkları metnin bütünlüğü ve anlaşılması için önem arz etmekteydi. Daha sonra formül ve işlemlerin günümüz cebir formül ve işlemleri haline getirilmesi sağlanmıştır. Elimizdeki iki farklı baskıdan istifade ile eksiklikler ve hatalar düzeltilmeye çalışılmıştır. Ayrıca günümüzdeki cebir kitapları ile sağlama yapılmıştır. Son olarak kitabın sonunda yer alan ilave problemler tezimize dâhil edilmemiştir.

Terimler konusunda ise günümüz terim karşılıkları bulunmuş ve ona göre bir de terimler sözlüğü hazırlanıp tezimizin ekine konulmuştur.

2.2. SADELEŞTİRME

2.2.1. Mukaddime

Bismillahirrahmanirrahim

(Rahmeti bu dünyada her şeyi kuşatan öbür dünyada ise yalnızca daimî olarak inananları kuşatan Allah'ın adıyla başlarım.)

Sonsuz hamd, şükür ve övgü sınırsız olarak Yüce Allah'a olsun. Bu hayatta her şeyi bölüştürmeyi ayarlayan ve herkesi bütün bedenlerin çürüdüğü gün bir araya getiren o Allah Zatı, denklikten eşitlikten ortaklıktan uzak olan hazretlerine yani Yüce Allah'a hastır. Bizzat kendisinin tekliğini ve birliğini kastediyorum. Kendisi benzerinden ve emsalinden uzak olup ve Zatı uluhiyetinin gücü kudreti sonsuz olmakla herkes ona muhtaç o kimseye muhtaç değildir. Yine Zatı uluhiyeti her türlü belirtme ve sınırlamadan uzaktır. Yüksek dereceli rahmet ve bağışı ve kesintisiz bereket ve selâmı Peygamberlik sarayın sahibine olsun. O her türlü bağın antlaşmanın nübüvvet zincirinin vasıtasıdır. Kendisi O her yönü şefkat ve rahmet kitabı olup insanların konumunu ve şeriatın meydana gelişini düzenleyen Efendimiz Hazretlerinindir. Yüce eşik ve yüksek bağ ve kutlu Zatı Peygambere hastır. O "Sen olmasaydın, sen olmasaydın ben bu alemleri (felekleri) yaratmazdım." Bu bir hakikati ifade etmekle, hiçlik aleminin meydana gelme sebebidir. Yüce Allah'ın rızası ve yüceltmesi O zatın ailesine ve nesebinin üzerine olsun. Özellikle "Cihâr-ı yâr-ı güzîn" seçkin dört halifenin üzerine olsun.

Bütün olarak Efendimiz (s.a.v)'e sahip çıkan Medineliler ile kendisiyle hicret eden (Mekke'den Medine'ye göçen) Mekkelilerin, Yüce Allah'ın rızası hepsinin üzerine olsun. Bu eser Efendimiz (s.a.v)'in hazretlerine ithaf ve armağan olunur ki; gönül alma karşılık verme her türlü gayreti ve savaşı üstlenerek İslâm milletinin lâyık olduğu sınırları genişleterek ve Efendimiz Ahmed'in (s.a.v) şeriatını yükseltmeyi buyurarak dini mübinin (açık İslâm dininin) yapılması gerekenlerle yapılmaması gerekenleri (müsbet ve menfi) açıklamış ve belirterek buyurmuşlardır.

Daha sonra saltanata ait güzelliklerin, hayır eserlerinin yüce padişaha ait olup bizde bu yüce saltanatta bulunan askeri erkândan çeşitli harp sanatları içerisinde daha önce padişahın askerleri için kurulmuş ve yeniden ihya edilen, Mekteb-i Harbiye-i

Şahane'de hendese ve hikmet ilimlerinin esasını ve bütün olarak da hesap işlemlerinin özenle ele alındığı makamında çok yararlı olan Mekteb-i Harbiye-i Şahane ilm-i cebir ve mukabele ile ilgili yüce görevin hocalığı Allah'ın aciz kuluna verilmiştir. Bu bilimde bazı Avrupa kitaplarından tercüme edilerek talebelere notlar hazırlamıştım. Zamanla bu notlar dağılmış ve bazı farklı amaçlar için kullanılmıştı. Hocalarımdan Mühendishane-i Berri-i Hümayun Eski Başhocası el-Hacc Hafız İshak Efendi, *Mecmua-yı Ulûm-ı Riyâziye* adlı eseirnin birinci cildinde "cebir ilmini ve bazı kurallarını ele almıştır. Bundan başka müteferrik bazı risaleler bulunmaktadır. Ancak bunların ifade tarzı oldukça basit ve başlangıç seviyesinde kalmıştır. Ayrıca örnek problem ve çözümleri bulunmamaktadır.

Oysa cebir ilmi birçok yöntem ve kuralı kapsar, uygulamada uzmanlık tahsiline bağlıdır. Ben birçok kural ve örneği kapsayan, tercüme ve telif yoluyla böyle bir kitab hazırlamak öteden beri içimde ukte idi. Allah'a şükürler olsun padişahımız Sultan Abdülmecid han zaman-ı saltanatında bu kitap tmamlandı. Adını Usul-i Cebr koydum. Bir mukaddime 184 madde halinde düzenlendi.

2.2.2. İşaretlerin Tanımı Ve Terimlerın Açıklamaları

(1) Tam sayılar, harfler ile ifade edilir ve aralarında olan oran özel semboller vasıtasıyla yazılır. Kullanılan genel kurallara "ilm-i cebir" denir.

Şimdi zikrolunan nicelikleri göstermek için *ebced* harfleri kullanılır. Bunların ilk harfleri olan *b, c*, *d* ve *e* bilinen nicelikleri, *sif'as* 'ın ilk harfleri olan *x, y*, *f* ve *z* *harfleri ise bilinmeyen nicelikleri gösterir. Bu nicelikler arasında var olan oranın da bazı özel işaretler ile ifade edilmesi bu bilimin yöntemlerindendir.

Aşağıda zikr olunduğu gibi.

(2) "+ " (*Zaid*), artı işaretidir. Bir niceliğin önüne konulduğunda o nicelik, sonraki niceliğin artışına delalet eder.

Örneğin; $b + c$ tabiri, *c* harfiyle gösterilen niceliğin *b* harfiyle gösterilen niceliğe artışı demek olur. Mesela *b* harfi 5 sayısını gösterip ve *c* harfi 7 sayısını gösterirse $b + c$ tabiri 12 sayısını gösterir. Eğer bir niceliğin önünde hiçbir işaret konulmamış ise o niceliğin önünde daima "+" işaretinin var olduğu varsayılır. Nitekim *b* niceliği $+b$ demektir ve bu tür nicelikler **"pozitif sayılar"** olarak adlandırılır.

(3) Aynı şekilde "-" (*Nakıs),* eksi işaretidir, "-" işareti, bir niceliğin önüne konulduğunda ilk nicelikten son niceliğin çıkarılmasına delalet eder.

$b - c$ ifadesi *b* niceliğinden *c* niceliğinin çıkarılmasını gösterir. Örnek; *b* harfi 7 ve *c* harfi 5 sayısından ibaret olsa $b - c$ tabiri 7 - 5 yani 2 demek olur. İşte bu şekilde önüne "-" işareti konulmuş olan niceliklere **"negatif sayılar"** denir.

(4) "×" işaretine (*Darb*) çarpma işareti denir ve iki niceliğin arasında bulunduğunda niceliklerin birbiri ile çarpılmasına delalet eder.

Şöyle ki $b \times c$ tabiri *b* harfiyle gösterilen niceliğin *c* harfiyle gösterilen nicelik ile çarpımını gösterir, bazen bu işaret konmadan $b\ c\ d$ yahut $b.c.d$ yahut $b \times c \times d$ olarak gösterilir. Eğer iki veya daha çok rakamın birbirleriyle çarpımı istenirse

* Günümüzde bilinmeyenler için kullanılan sembollerden yola çıkarak *Si'fa's* harflerine karşılık *x, y, f, z* sembollerini kullandık.

yukarıda belirtilen çarpma işareti mutlaka zikredilen rakamların aralarına konulur. Birden fazla niceliğin çarpımında adı geçen niceliklerin her birine çarpımın çarpanı adı verilir. Mesela $3bcd$ çarpımında 3 ve b ve c ve d niceliklerinin her birine bir çarpan denilip ve aynı biçimde $3b$ ve $3c$ ve $3bc$ ve $3bd$ ve $3cd$ ve bc ve bd ve cd ve bcd niceliklerinin her birine yine aynı şekilde çarpımın çarpanları denilir.

(5) Eğer bir nicelik kendisi ile birkaç defa çarpılırsa, bu tekrarı göstermek için o niceliğin üstüne "**aded-i kerrat"** (çarpım sayısı) yazılır. Bu da çarpımı verir.

Şöyle ki; b^1, b^2, b^3, b^4 …. b^n devam eden nicelikleri b ve $b \times b$ ve $b \times b \times b$ ve $b \times b \times b \times b$ niceliklerine işaret eder. Zikredilen niceliklerin üstlerine yazılan rakamlara o niceliğin **kuvveti** veya **üssü** denir. Nitekim b^1 niceliği b niceliğinin birinci kuvveti ve b^2 niceliği b niceliğinin ikinci kuvveti yahud karesi ve b^3 niceliğine b niceliğinin üçüncü kuvveti yahud küpü ve bunun gibi isimlendirilirler.

(6) Bu işarete "÷" (*Taksim*) bölme denir. İki niceliğin arasına konulduğunda bu niceliklerden ilk niceliğin ikinci niceliğe bölünmesini işaret eder.

Şöyle ki $b \div c$ tabiri b niceliğinin c niceliği üzerine bölünmesini ifade eder. b niceliğinin c niceliğine bölünmesini göstermek için b / c şeklinde yazılır b bölü c diye okunur ve kesir diye adlandırılır. b niceliğine az önce adı geçen kesrin *sureti* **payı**, c niceliğine de kesrin *mahreci* **paydası** denilir. Bazen bu şekilde $b : c$ diye yazılarak yani yukarıdaki işaretlere karşılık iki sıfır dikey durumda **(iki nokta üst üste)** kullanılır.

(7) Bu ∾ işaret, iki nicelik arasında bulunduğunda bu niceliklerden büyüğünden küçüğünün çıkarılmasını işaret eder.

Mesela $b \backsim s$ tabiri b ve s niceliklerinden hangisi büyük ise büyük olandan küçük olan niceliğin çıkarılmasını gösterip, $b - s$ yahud $s - b$ olarak yani bu niceliklerin aralarında olan fazlalığın çıkarılmasına işaret edip *tefazul* **fark** diye isimlendirilir.

(8) Bu ">" işaret, iki nicelik arasına konulduğunda ilk niceliğin son nicelikten büyüklüğünü gösterir. Eğer bu işaret "< " diye yazılır ise ilk niceliğin son nicelikten küçük olduğunu gösterir. Yani sembolün açık tarafında bulunan büyük, kapalı tarafında bulunan küçük demektir. Ayrıca "∴"işaretiyle "∵"işaretinin de kullanımı uyulan kurallar olarak, bu işaretlerin birincisi "**bu sebepten**" ve ikincisi "**zira"** diye isimlendirilir. Yani bazı ibareleri ve denklemleri aralarında sadeleştirmek için "**bu sebeple**" yerine üç sıfır "**mebsut"** ve yine "**zira**" yerine üç sıfır "**ma‘kûs"** konur.

(9) Bazı kere birden fazla niceliğin hepsini birden almak için parantez diye isimlendirilen ( ) ve { } ve [ ] işaretleri kullanılır.

Şöyle ki $b - c + d$ niceliği $v - e$ niceliğinin çarpan olduğunu göstermek için $(b - c + d) \times (v - e)$ yazılarak $b - c + d$ niceliğinin sonucunun $v - e$ farkına çarpımını gösterir. Şimdi b niceliği 6 ve c niceliği 5 ve d niceliği 4 ve v niceliği 3 ve e niceliği 1 olsa $b - c + d$ tabiri 6 - 5 + 4 yahud 5 olup $v - e$ niceliği 3 - 1 yahut 2 olarak bu biçimde $(b - c + d) \times (v - e)$ tabiri 5×2 yahut 10 olmuş olur. Bunun gibi $(bc - de) \times (bc - de)$ tabiri $(bc - de)^2$ tabirine eşit olarak $bc - de$ niceliğinin kendi ile çarpımına işaret eder. Bazı durumlarda birden fazla niceliğin hepsi birden alındığında en yüksek üstlerine bir çizgi çekilmiş olup bu şekilde $(b\text{-}c\text{+}d)\times(v\text{-}e)$ diye yazılarak $(b - c + d)$ $(v - e)$ denmiş olur.

(10) Bu işarete “=“ (*Müsâvi*) eşittir denir. İki nicelik arasına konulduğunda zikredilen niceliklerin birbirine eşitliğini gösterir. Şöyle ki, $be+de = bx\text{-}cy$ niceliği $bx\text{-}cy$ niceliğinin $be+de$ niceliğine eşitliğini gösterir.

(11) Bir niceliğin **cezr-i murabba‘ı** yani herhangi bir niceliğin *karekökü* öyle bir niceliktir ki adı geçen kökün kendi ile çarpımına, yani karesine eşit olur. Bir sayının **cezr-i müka‘abı** yani herhangi bir sayının *küpkökü* kendi ve kendine iki defa çarpılması, yani tek‘ib küpü olup yukarıda zikredilen niceliğe eşit olur. Aynı şekilde bir niceliğin *n*. kuvvetten kökü öyle bir niceliktir ki *n*. kuvvete yükseltildiğinde zikredilen niceliğe eşit olur ve bu kökün işlemini göstermek için $\sqrt[\square]{\square}$ yahut $\sqrt[2]{\square}$ ve $\sqrt[3]{\square}$ ve $\sqrt[4]{\square}$ ve $\sqrt[n]{\square}$ …. sembolleri kullanılarak kökleri istenilen niceliklerin sağ tarafına yazılıp rakamla söylenmiş niceliklerin karekökü ve küpkökü ve dördüncü kuvvetten kökünü gösterir.

Nitekim $\sqrt[2]{b^2} = b$ $\sqrt[3]{b^3}= b$ $\sqrt[4]{b^4} = b$ $\sqrt[n]{b^n}= b$ niceliklerinde olduğu gibi artık kökleri istenilen niceliğin kuvvetlerine bu 1/2 ve 1/3 ve 1/4…kesri yazılarak daha önce geçtiği gibi kökü gösterilebilir. Şöyle ki $b^{1/2}$ ve $b^{1/3}$ ve $b^{1/4}$ ve $b^{1/n}$ nicelikleri b niceliğinin karekökü, küpkökü ve dördüncü kuvvetten kökü ve *n*. kuvvetten kökünü gösterir. Aynı şekilde $b^{5/2}$ ve $b^{7/3}$ ve $b^{3/5}$ tabirleri b niceliğinin beşinci kuvvetinin karekökü ve yedinci kuvvetinin küpkökü ve üçüncü kuvvetinin beşinci köklerini gösterir.

(12) Kökü tam olarak alınabilen niceliklere yani karekök dışına çıkabilen niceliklere *muntak* **rasyonel sayılar** ve mümkün olmayan yani karekök dışına çıkamayan niceliklere *asame* **irrasyonel sayılar** denir.

(13) Niceliklerin aralarında olan oranı göstermek için " : " ve "::" noktalar kullanılır.

Şöyle ki b:c :: d:e tabiri b niceliğinin c niceliğine olan oranı d niceliğinin e niceliğine olan oranına eşit olduğunu gösterir.

(14) Cebirsel niceliklerin sağ tarafına konularak zikredilen niceliklerin kaç defa alındığını yani katını ve benzer katlarını gösteren rakama *emsal rakam* **katsayı** denilir. Bu $7bx$ ve $6cy$ ve $3dz$ niceliklerinde olan 7 ve 6 ve 3 rakamları bx ve cy ve dz niceliklerinin katsayıları olur. Katsayıdan yoksun olan cebirsel terimlerin hesabında bildirildiği üzere *cüzz-i sahîhleri* olmayan adâd-ı mütebâyinenin katsayıları dahi daima bir olarak bc niceliği bir kere bc demek olur. Bazen katsayısında sayı yerine harf yazılır. Mesela rx ve kx^2 ve fx^3 niceliklerinde r ve k ve f harfleri x ve x^2 ve x^3 niceliklerinin katsayı harfleri olmuş olur.

(15) Yalnız katsayıları farklı olan cebirsel nicelikler **benzer cebirsel nicelikler** ve farklı niceliklerin bir yere toplanmasıyla olan birleşim **benzer olmayan cebirsel nicelikler** diye isimlendirilir. Mesela $4b$ ve $6bc$ ve $9b^2$ ve $3b^2cd$ nicelikleriyle $15b$ ve $3bc$ ve $12b^2$ ve $15b^2cd$ niceliklerinin benzer benzerine bulunanları yalnız katsayı cihetiyle farklı olduğundan benzer terimlerdir. Ve bc, b^2c ve bcd nicelikleri farklı niceliklerin bir yere gelmesinden oluştuğundan benzer olmayan terimler olur.

(16) Bir nicelik başka bir niceliği birkaç defa tamamını kapsasa ilk nicelik ikinci niceliğin **katı** (iz'af) diye isimlendirilir. Şöyle ki $16b$ niceliği $4b$ niceliğinin 4 defa toplanması olduğundan işte $16b$ niceliği $4b$ niceliğinin katı olmuş olur.

(17) Bir nicelik başka nicelikte birkaç defa tamamen var olsa ilk nicelik son niceliğin böleni diye isimlendirilir. Şöyle ki $4b$ niceliği $16b$ niceliğinde tamamen 4 kere mevcud olduğundan $4b$ niceliğine $16b$ niceliğinin **böleni** denir.

(18) Yalnız bir terimden ibaret olan işte b^2cd niceliğine tek terimli diye genellenir.

(19) İki terimden ibaret olan, $b + c$ ve $2b - 3c$ gibi ifadelere **iki terimli**, $2b + c - 3e$ gibi ifadelere ise **üç terimli** denir. İkiden fazla olan nicelikler **çok terimli** olarak genellenir.

Açıklamalar;

Eğer birbirine eşit olan nicelikler diğer birbirine eşit olan nicelikler ile toplansalar toplamları da birbirine eşit olurlar.

Eğer birbirine eşit olan nicelikler, birbirine eşit olan niceliklerden çıkarılsalar kalanları da birbirine eşit olur.

Eğer eşit olan nicelikler başka bir nicelik ile yahut birbirine eş değerdeki iki nicelik ile çarpılsalar sonuçları da birbirine eşit olur.

Eğer eşit nicelikler diğer bir nicelik üzerine ya da eşit olan iki niceliğin üzerine bölünseler bölme işleminin sonuçları da birbirine eşit olur.

Eğer eşit olan nicelikler başka bir nicelik ile yahut birbirine eş değerdeki iki nicelik ile çarpılsalar sonuçları da birbirine eşit olur.

Eğer bir nicelik başka bir nicelik ile bir defa toplanıp ve bir defa çıkarılsa bu ilk niceliğin değeri asla değişmez.

Eğer bir nicelik başka bir nicelik ile bir defa çarpılıp ve bir defa bölünse bu ilk niceliğin değeri asla değişmez.

2.2.3. Cebirsel Niceliklerde Toplama

(20) Cebirsel niceliklerin toplamı benzer terimlerin toplamıyla yapılır. Benzer olmayan terimlerin toplamı ise işaretleriyle bir sıraya yazılarak olur.

Örnek 1: Aşağıda yazılı benzer olmayan terimlerin toplamı istenirse. İşlem:

bx

$-cy$

e^2

$-ed$

$bx - cy + e^2 - ed$ = toplam

Örnek 2 :

$b+2c-d$

$v-de+f$

$b+2c-d+v-de+f =$ toplam

İşte bu toplamlarda bulunan birçok niceliğin yalnız işaretlerine dikkat edip harflerin sıralanışına asla uyulmaz. Şimdi zikrolunan toplamlarda eğer benzer terimler bulunur ise adı geçen terimler birbirleriyle toplanarak kısaca toplam bu şekilde sadeleştirilmiş olur. Evvela benzer terimleri ve işaretleri benzer olan niceliklerin toplamında katsayıları toplanarak işte toplamın sol tarafına işaretleri yazılıp ve sağ tarafına zikredilen terimlerde ortak olan harfler yazılır.

Örnek 3 :

$5b - 3c$

$4b-7c$

$9b-10c$= toplam

Örnek 4 :

$4b^2d-10ce$

$6b^2d-9ce$

$11b^2d-3ce$

$21b^2d - 22ce$ =toplam

Bu yapılan işlemin sebebi ortadadır. Şöyle ki $5b$ ile $4b$ toplandığında $9b$ ortaya çıkıp $3c$ ile $7c$ çıkanı toplandığında $10c$ elde edilir.

İkinci olarak: işaretleri farklı olan benzer niceliklerin toplamlarında pozitif olan katsayılar birbirleri ile toplanıp negatif olan katsayılar da birbirleriyle toplanarak, iş bu ilk toplam ile ikinci toplam arasındaki fark alınır ve bu farkın önüne zikrolunan toplamların hangisi büyük ise onun işareti yazılır.

Örnek 5:

$7b+3c$

$-5b-9c$

____

$2b-6c$ = toplam

Bu işlemin önünde bulunan 7 kere *b* ile 5 kere *b* birbirinden çıkarılarak kalan $2b$ ve zikredilen işlemin sonunda bulunan 3 kere *c* ile 9 kere *c* değiş tokuş yapılarak $-6c$ bulunur. Verilen benzer niceliklerin istenilen toplamları $2b - 6c$ niceliği olmuş olur.

Örnek 6 :

$b + c$

$b – c$

____

$2b$ = toplam

Buradan çıkan sounuç: Pozitif ve negatif işaretlere sahip olan benzer terimlerin toplamında pozitif işaretlere sahip olan terimlerin katsayıları toplanıp ve negatif işaretlere sahip olan terimlerin katsayıları toplanarak birinci toplam ikinci toplamdan çıkarıldıktan sonra geri kalan terimin önüne toplamlardan hangisi büyük ise onun işareti yazılır.

Örnek 7 :

$3b^2 + 4cd - e^2 + 10$

$-5b^2 + 6cd + 2e^2 -15$

$-4b^2 -9cd – 10e^2 +21$

____

$-6b^2 + cd -9e^2 + 16$ = toplam

Örnek 8 :

$4bd – 15ce +vx$

$11bd + 7c^2 – 19vx$

$-41b^2 + 6ce – 7ve$

$15bd – 41b^2$ -9ce $+7c^2$ $-18vx$ $-7ve$ = toplam

Örnek 9:

$fx^3 – lx^2 – rx$

bx^3- $cx^2 – x$

$(f+b)x^3 – (l+c)x^2$- $(r+1)x$ = toplam

Dokuzuncu örnekte x niceliğinin kuvvetleri gereğince katsayıları birleşmiştir. Çünkü $x^3(f+b) = x^3f +x^3b$ ve aynı şekilde işlem… $-x^2 (l + c) = - x^2 l– x^2c$

Zira bir bir parantez içi işlemin önünde bulunan işaret parantez içinde bulunan terimlerin hepsini etkiler. Bu şekilde işlem $-x (r +1) = -xr - x$ olmuş olur.

2.2.4. Cebirsel Niceliklerde Çıkarma

(21) Çıkarma yahut bir niceliğin diğer nicelikten farkı işte bu çıkarılacak niceliğin işaretleri değiştirilerek diğer nicelik üzerine 20. Madde gereği toplanır.

Örnek 1:

$2cx$ niceliğinden dy niceliğinin çıkarılması $2cx$- dy şeklinde gösterilir. dy niceliğinin önüne konulan - işareti bu niceliğin $2cx$ niceliğnden çıkarılmasını gösteremekte olup, $2cx$-dy iki terimlisini $2cx$ niceliğiyle $-dy$ niceliğinin toplamı olmuş olur.

Örnek 2:

Aynı şekilde $2cx$ niceliğinden $-dy$ niceliği çıkarılsa istenilen fark tam tersi $2cx+dy$ niceliği olur. Çünkü $2cx=2cx+dy-dy$ olduğundan (Açıklama 5) işte bu birbirine eş değerde $-dy$ niceliği çıkarılarak bakılır birbirine eşit olmayan $2cx$ niceliğiyle $-dy$ niceliği aralarında olan fark $2cx+dy$ niceliği olup $2cx$ niceliğiyle $+dy$ niceliğinin toplamına eşit olmuş olur.

Örnek 3:

$b + c$ niceliğinden

$b - c$ niceliği çıkarıldığında

$+2c$ = fark

Örnek 4 :

$6b - 12c$ niceliğinden

$-5b - 10c$ niceliği çıkarıldığında

$11b - 2c$ = fark

Örnek 5:

$5b^2 + 4bc - 6xy$ niceliğinden

$11b^{2+}6bc - 4xy$ niceliği çıkarılırsa

$-6b^2 - 2bc - 2xy$ = fark

Örnek 6 :

$4b - 3c + 6d - 11$ niceliğinden

$10x + b - 15 + 2y$ niceliği çıkarıldığında

$-10x + 3b - 3c + 4 + 6d - 2y$ = fark

Örnek 7:

$bx^3 - xc^2 + x$ niceliğinden

$fx^3 - lx^2 + rx$ niceliği çıkarılırsa

$(b-f)x^3 - (c-l)x^2 + (1-r)x$ = fark

İşte bu yedinci örnekte katsayı harfleri birleşmiştir. Çünkü işlem $(b-f)x^3$ niceliği $bx^3-f\,x^3$ niceliğine ve $-(c-l)x^2$ niceliği $-cx^2+lx^2$ niceliğine eşit olup ve $(1-r)x= x - rx$ olmuş olur.

2.2.5. Cebirsel Niceliklerde Çarpma

(22) Tek olan cebirsel niceliklerin çarpımı, 5. Maddedeki açıklamalara göre yapılır. Buna göre $b \times c$ yahut $b\ c$ tabiri b niceliğinin c niceliği ile çarpımını gösterir. Aynı şekilde $b\ c\ d$ tabiri b ve c ve d üç niceliğin çarpımını gösterir. Çarpma işleminde harflerin sıralanışına riayet önemli değildir. Yani $b \times c$ yazımıyla $c \times b$ yazımı birbirinin aynıdır. $1 \times b = b \times 1$ yani tek b kere almak b niceliğinin bir kere alınmasına eşit olup ve aynı şekilde c niceliğinin b kere alınması yahut $b \times c$, c niceliğinin 1 kere alınmasından b kere büyük olduğundan (Açıklama 3) $b \times c = c \times b$ olur. Bunun gibi $b\ c\ d{=}d\ b\ c{=}c\ d\ b$ eşittir. Çünkü daha önce açıklandığı üzere $1 \times b \times c = b \times c \times 1$ olup $b \times c \times d$ niceliği $b \times c \times 1$ niceliğinden d kere büyük olup ve aynı şekilde $b \times c \times d$ niceliği $b \times c \times 1$ niceliğinden d kere büyük olarak $b \times c \times d = d \times b \times c$ olur ve kalanı da buna kıyas edilir.

(23) Çarpımın işaretini belirlemek için gelecek kurallara dikkat edimesi gerekir. Eğer çarpan ve çarpılanın işaretleri benzer ise çarpımın sonucu daima pozitif ve eğer zıt ise çarpımın sonucu negatif olur. Yani zikredilen çarpımın ikisi de pozitif ise ya da ikisi de negatif ise bilakis yine artı olur. Çarpılanlardan biri artı diğeri eksi ise çarpım eksi olur. Şöyle ki evvela $+b \times +c = +bc$ zira bu konuda b niceliğinin c kere alınması istenilen çarpım pozitif olarak bc olmuş olur.

İkinci olarak $-b \times c = -bc$ zira $-b$ niceliğinin c kere alınması istenilen olduğundan işte bu çarpımdan $-bc$ niceliği çıkmış olur.

Üçüncü olarak $+b \times -c = -bc$ çünkü b niceliğinin $-c$ niceliğiyle çarpımı demek c niceliğinin değeri miktarınca b niceliğinin azaltılması demek olur. b niceliğinin c kere azaltılması $-bc$ olarak, ileride 26. maddenin ikinci örneğinde daha iyi anlaşılır.

Dördüncü olarak $-b \times - c = +bc$ bu da $-b$ niceliğinin c kere azaltılması, yani elde edilen bc olup, iş bu elde edilenin tekraren azaltılması demektir (madde 21) $+bc$ niceliğinin arttırılması demek olur. Bu, ikincideki ve dördüncüdeki $b - b = 0$ şeklinde ispat olunabilir. İşte bu eşitliğin her iki tarafı c niceliğiyle çarpıldığında bc ile $-bc$ olur. $0 \times c$ ya da sıfıra eşit olduğundan $-b$ niceliği c niceliğiyle çarpıldığında $-bc$ niceliği olması lazım gelir ki bc niceliğiyle toplanarak işte bu toplam sıfıra eşit olur. Yine $b - b = 0$ eşitliğinin iki tarafı $-c$ niceliğiyle çarpılıp bir de $-bc$ ile $-b \times -c$ toplamı sıfıra eşit olması lazım gelir, o sebepten $-b \times -c = +bc$ olduğu görünmüş olup istenilen ispat olur.

(24) Eğer çarpan ile çarpılanda katsayı bulunur ise zikredilen rakamları hesap kurallarına göre birbiri ile çarpılıp çarpımın işareti ve yukarıda zikri geçen harflerden kurallara göre daha kolay şekilde tayin olunurlar.

Örneğin; $3b \times 5c = 15bc$

Çünkü $3 \times b \times 5 \times c = 15\ bc$ (madde 22) ve yine

$4x \times -11y = -44xy$ ve $-9cx -5d = +45cd$ ve $-6e \times 4m = -24em$ olur.

(25) Bir niceliğin kuvvetlerinin çarpımı, üs rakamlarının toplamıyla olur. $b^2 \times b^3 = b^5$ olur. Zira $b^2 = b \times b$ ve $b^3 = b \times b \times b$ olduğundan $bb \times bbb = bbbbb$ olur .

Ve aynı şekilde $b^6 \times b^{10} = b^{16}$ ve $-3b^2x^3 \times 5bx\,y^2 = -15b^3x^4y^2$ olur ve m ile n iki nicelik pozitif olarak $b^m \times b^n = b^{m+n}$ olduğunun ispatı istenirse altıncı madde ile $b^m = b \times b \times b \times b \ldots$ m adet b'nin çarpımına denir. Aynı şekilde $b^n = b \times b \times b \times b \ldots$ n adet b'nin çarpımına denir. Bu sebepten $b^m \times b^n = b \times b \times b \times b \ldots$ m adet çarpana değin ve $b \times b \times b \times b \ldots$ n adet çarpana değin $b \times b \times b \times b \times b \ldots$ $m+n$ adet çarpana değin b^{m+n} olup istenilen sabit olur.

(26) Eğer çarpan ile çarpılan çok fazla terimden ibaret ise çarpılanın her bir terimi çarpanın her bir terimi ile çarpılıp, bu çarpımların sonucunun toplamı zikredilen niceliklerin birbirine çarpımı olmuş olur.

Örnek 1:

$b + c$ çarp

$d + e$ ile

$bd + cd + be + ce$ = çarpım sonucu

İşte bu örnekte $b + c$ niceliğinin $d + e$ kere alınması istenilen olduğundan, d ve e kere demek, $d\,(\,b + c\,) + e\,(\,b + c\,)$ olup istenilen sonuç olur.

Örnek 2:

$b + c$ çarp

$d - e$ ile

$bd + cd - be - ce$ = çarpım sonucu

Bu örnekte de $b+c$ niceliğinin d-e kere alınması istendiğinden o da pozitif olarak d kere alınmasıyla negatif olarak e kere alınması demek olur.

Örnek 3:

$b + c$

$b + c$

$b^2 + bc$

$+ bc + c^2$

$b^2 + 2bc + c^2$

Örnek 4:

$b + c$

$b - c$

$b^2 + bc$

$- bc + c^2$

$b^2 - c^2$

Örnek 5:

$3b^2 - 5cd$

$-5b^2 + 4cd$

$-15b^4 + 25b^2cd$

$+12b^2cd - 20c^2d^2$

$-15b^4 + 37b^2cd - 20c^2d^2$

Örnek 6:

$b^2 + 2bc + c^2$

b^2 - $2bc$ +c^2

---

b^4 +$2b^3c$ +b^2c^2

-$2b^3c$ -$4b^2c^2$ -$2bc^3$

+b^2c^2 +$2bc^3$ +c^4

---

b^4 -$2b^2c^2$ +c^4

Örnek 7:

$1 - x + x^2 - x^3$

$1 + x$

$1 - x + x^2 - x^3$

$+x - x^2 + x^3 - x^4$

$1-x^4$

Örnek 8:

$x^2 - qx + l$

$x + b$

$x^3 - qx^2 + lx$

$+bx^2 - bqx + bl$

$x^3 - (q-b)x^2 + (l-bq)x + bl$

İş bu örnekte x^2 ile x niceliklerinin katsayıları birleştirilmiştir. Çünkü;

$-(q-b)x^2 = -qx^2 + bx^2$ ve $(l - bq)x = lx - bqx$ nicelikleri birbirinin aynıdır.

2.2.6. Cebirsel Niceliklerde Bölme

(27) Bir niceliğin diğer niceliğe bölünmesi: ikinci niceliğin ilk nicelikte kaç kere mevcut olduğunun yahut ilk niceliğin eşitini bulmak için ikinci niceliğin hangi nicelik ile çarpılacağını bulmaktan ibarettir. Şöyle ki *bc* niceliğinin *b* niceliğine bölümü, *b* niceliği, kaç kere alınmalı ki *bc* niceliği elde edilsin. Yani kastedilen b niceliği hangi nicelik ile çarpılmalı ki *bc* niceliği hasıl olsun. Görüldüğü gibi çarpılan *c* niceliğidir. Şimdi bu anlatımdan cebirsel niceliklerin bölümü için verilecek kurallar gereklidir.

(28) Eğer bölen ve bölünenin işaretleri benzer ise bölüme +, farklı ise - işareti yazılır. Meselâ $-bc$ niceliği $-b$ niceliğine bölünürse bölüm $+c$ olur. Zira $-b$ niceliğinin $+c$ niceliğine çarpımı $-bc$ olup bölmenin sağlaması bu şekilde ispat olunabilir.

(29) Basit cebirsel niceliklerin bölünmesinde, bölenin katsayısıyla harf kısmı bölünende bulunursa, onların birbirlerine bölünmesi ile 1'e eşit olup, bölünenin geri kalanıyla daha önce bahsedilen kural gereğince işareti belirlenerek bölüme yazılır.

Meselâ $bcd / bc = d$ olur. Çünkü *bc* böleni *d* bölümüyle çarpıldığında *bcd* bölüneni elde edilir. Eğer farz edilen bölünen ilk *b* niceliğine sonra *c* niceliğine bölünse bölüm yine ilkinin aynı olur. Şöyle ki $bcd/b = cd$ ve $cd/c=d$ bölüm yine *d* niceliği olmuş olur.

(30) Uyarı! Eğer bir niceliğin herhangi kuvveti başka kuvvet üzerine bölünse bölüm zikredilen niceliğe eşit olarak üssü de bölünenin üssüyle bölenin üssü farkına eşit olur.

Çünkü, $b^5/b^3 = b^2.$ $b\times b \times b \times b \times b / b \times b \times b = b^2$ olup

Ve aynı şekilde $b^3/b^6 = 1/b^3$ genel olarak *m* ve *n* nicelikleri, iki nicelik pozitif farz edilse $b^m/ b^n = b^{m-n}$ olur.

Çünkü $b^m/b^n=b \times b \times b \times$ ……. *m* adet çarpana değin $/b \times b \times b \times$...... *n* adet çarpana değin $= b \times b \times b \times$ ..... *m-n* adet çarpana değin olmakla *m* niceliği *n* niceliğinden daha büyük olursa $= b^{m-n}$ olup b^m niceliğiyle b^n niceliğinin bölümü olmuş olur.

(31) Eğer bölenin çarpanlarından bazıları bölünende bulunup bazıları bulunmadığı takdirde (madde 27) kural gereği bölme işlemi yapılıp bölünen ile bölende ortak olan çarpanlar yok edilir. Şöyle ki, $15b^3c^2d$ niceliği $-3b^2cx$ niceliğine bölünerek $15b^3c^2d / -3b^2cx = -5bcd / x$ olup $-5bcd$ niceliği x niceliğine de bölünecek ise de (madde 29) bölünende x niceliği bulunmadığından bölme işleminin yapılması mümkün olmamaktadır. Bu yüzden $-5bcd / x$ yazılır, ancak gösterim şeklinde kalmış olur.

(32) Eğer bölünen çoklu terim, bölen tekli terim olur ise bölünenin her bir terimi, bölene bölünür.

Örneğin; $b^3x^2 - 5bcx^3 + 6bx^4 / bx^2 = (b^3x^2 / bx^2) - (5bcx^3 / bx^2) + (6bx^4 / bx^2) = b^2 - 5cx + 6x^2$ olur.

(33) Eğer bölünen ile bölen her ikisi de çok terimli ise evvela bu çok terimliler kendilerinde bulunan harflerden birinin kuvvetlerine göre düzenlenir ve bölünenin ilk terimi, bölenin ilk teriminde kaç kere var ise bu nicelik bölümün ilk terimi olur. Sonra bölenin ilk terimi, her bir terim ile çarpılıp, çarpım sonucu bölünenden çıkarılıp bölünenin kalan terimlerinden gerekli miktarı bölünen terimin altına yukarıda bahsedildiği üzere bölme son buluncaya değin zikrolunan işlem iade ve tekrar olunarak istenilen bölüm elde edilir.

Örnek 1 Eğer b^2-$2bc$+c^2 çok terimlinin b-c iki terimli üzerine bölünmesi istenirse yapılışı aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{array}{l}
b-c \;)\; b^2 - 2bc + c^2 \;(\; b-c \\
\quad b^2 - bc \\
\hline
-bc + c^2 \\
-bc + c^2 \\
\hline
\quad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

Bu kuralın sebebi, bölünen kendi parçaları toplamından ibaret olduğundan bölenin bölünende bulunduğu terim miktarınca bölünenin parçalarında da bulunduğundan yukarıda varsayılan örnekte önce b niceliğinin b^2 niceliğinde kaç kere mevcut olduğu yazılıp, bulunan b niceliği bölümün ilk terimi olarak işte bu nicelik bölenin toplam terimleriyle çarpılıp çarpımın sonucu olan b^2-bc niceliği bölünenden çıkarıldıktan sonra geriye kalan -bc+c^2 iki terimiyle işlem aynen eskisi gibi olur.

Gerçekte b^2-$2bc$+c^2 üç terimlisi yukarıda yapılan işlem aracılığıyla iki kısma bölünüp her biri b-c niceliği üzerine bölünürse gerçek bölüm ortaya çıkar.

Örnek 2:

$b + c$) $bd + be + cd + ce$ (d+e

$bd + cd$

$be + ce$

$be + ce$

---

0 0

Örnek 3:

1-x) 1 (1 + x + x^2 + x^3 + lh + kalan / 1-x

$1 - x$

+x

+$x - x^2$

+ x^2

+$x^2 - x^3$

+x^3

+$x^3 - x^4$

+x^4 +lh

Örnek 4 :

$$
\begin{array}{l}
y-1\;)\;y^3-1\;(\;y^2+y+1 \\
\quad\; y^3-y^2 \\
\hline
\quad\;\; +y^2 \\
\quad\;\;\; y^2-y \\
\hline
\quad\;\;\; +y-1 \\
\quad\;\;\; +y-1 \\
\hline
\quad\;\;\;\; 0 \quad 0
\end{array}
$$

Örnek 5 :

$$
\begin{array}{l}
x-z\;)\;x^{m}-z^{m}\;\;(\;x^{m-1}+x^{m-2}z+x^{m-3}z^{2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+z^{m-1} \\
\quad\; x^{m}-x^{m-1}z \\
\hline
\quad\;\; +x^{m-1}z-z^{m} \\
\quad\;\; +x^{m-1}z-x^{m-2}z^{2} \\
\hline
\quad\;\;\;\; +x^{m-2}z^{2}-z^{m} \\
\quad\;\;\;\; +x^{m-2}z^{2}-x^{m-3}z^{3} \\
\hline
\quad\;\;\;\; +x^{m-3}z^{3}-z^{m}\;\; \text{lh}
\end{array}
$$

İşte bu bölme işlemi, *m* niceliğinin varsayılan herhangi değeri için kesirsiz biterse, bölümün son terimi x^{m-1} olarak, terim sayısı *m* niceliğine eşit olur.

Örnek 6:

$$
\begin{array}{l}
x-b\;)\;x^{3}-qx^{2}+lx-r\;(\;x^{2}+(b-q)\,x+b^{2}-qb+l \\
\quad\; x^{3}-bx^{2} \\
\hline
\;\; (b-q)x^{2}+lx
\end{array}
$$

$(b\text{-}q)x^2 - (b^2 - qb)x$

$+(b^2 - qb + l)\ x\text{-}r$

$+(\ b^2 - qb + l)\ x - (b^3 - qb^2 + lb)$

$b^3 - qb^2 + lb - r$ kalan.

2.2.7. Kesirli Niceliklerin Değerde Eşiti Diğer Kesirlere Aktarma ve Dönüştürülmesi:

(34) Eğer bir kesrin payıyla paydasında olan terimlerin işaretleri değiştirilse bu kesrin değeri değişmez. Örneğin, $-bc/-b = +bc/+b$ ve $bc/-b=-c$ $-bc/+b=-c$ olur.

(35) Eğer bir kesrin payıyla paydası bir nicelik ile çarpılsa ya da bölünse bu kesrin değeri aynı şekilde değişmez. Örneğin, $bd\ /cd= b/c$ (madde 31) olur. İşte bu kuraldan dolayı bir kesrin payıyla paydasında ortak olan büyük çarpan üzerine adı geçen kesrin payıyla paydası bölünmesi ile sadeleştirilir. Kesirlerde uyulan kurallardan biri olarak adı geçen büyük çarpanı da kesrin payı ile paydasının **en büyük ortak böleni** diye isimlendirilir.

(36) Bir kesrin payıyla paydasından her biri tek terimli olur ise bunların ortak bölenlerinin en büyüğü bir bakışta belli olur. Zikredilen kesrin sadeleştirmesi daha kolay olur. Mesela $3b^2cd/5b^3c^2e$ kesrinin sadeleştirilmesi istense b^2c niceliği payıyla paydanın en büyük ortak böleni olduğu açıkça görülür. O sebepten zikredilen kesir, $3d\,/\,5bce$ kesrine çevrilmiş olur. Kaldı ki, bir kesrin payıyla paydası meydana getirilen nicelikten ibaret olur. Bu kesrin sadeleştirmesi için altta yazılı kurala uymak gerekir.

(37) Meydana getirilen cebirsel niceliklerden her iki niceliğin en büyük ortak bölenlerini ortaya çıkarmak için bu iki niceliğin kendilerinde bulunan harflerden birinin kuvvetlerine bakarak şu şekilde düzenlenir: Büyük nicelik, küçük niceliğe bölünür ve bu bölümden kalan bölen, bu kalan üzerine yine bölünür. Bu şekilde her bölen kendi kalanı üzerine geride bir şey kalmayıncaya kadar bölündüğünde bölen diğer varsayılan iki niceliğin istenilen en büyük ortak böleni olmuş olur.

Meselâ *b* ve *c* iki nicelikten *c* niceliği *b* niceliğinde *d* kesri baki kalarak *v* kere mevcut ve yine işte bu *d* kesri *c* böleninde *e* kesri baki kalarak *l* kere mevcut olsa işte bu işlem bir şey kalmayıncaya değin yapılarak bölen son olan *e* niceliği *b* ile *c* niceliklerinin en büyük ortak bölenleri olur ve yöntemi bu şekildedir.

$c\,)\ b\ (\,v$

$v\,c$

———

$d\,)\ c\ (\,l$

$d\,l$

———

$e\,)\ d\ (\,r$

$r\,e$

———

(38) Bu kuralın doğruluğu iki yönteme bağlıdır. Birincisi eğer bir nicelik başka bir niceliğe tam olarak bölünür ise ilk niceliğin herhangi bir katı da tamamen bölünebilir. Farzedelim *x* niceliği *y* niceliği üzerine *n* terimi miktarınca tam olarak bölünse, bu *x* niceliği *dy* niceliği üzerine de *nd* terimi miktarınca bölünür. İkinci olarak eğer bir nicelik, başka bir niceliği tamamen bölse işte bu nicelik bahsedilen diğer iki niceliğin toplamlarıyla aralarında olan farka da tamamen bölünür.

Meselâ *b* niceliği *x* niceliğinde *m* defa ve *y* niceliğinde *n* defa mevcut olsa $mb=x$ ve $nb=y$ olduğundan iki tarafın toplamı ve farkı alındığında $x \pm y = bm \pm bn = b\,(\,m \pm n\,)$ olup *b* niceliği $x \pm y$ niceliğinde $m \pm n$ defa mevcut olduğu ya da *b* niceliği üzerine $x \pm y$ iki diğer niceliğin toplamı $m \pm n$ tek terim miktarınca bölünür.

(39) Otuz altıncı maddede yapılan işlemden görüldüğü üzere $b\text{-}vc=d$ ve $c\text{-}dl=e$ olup *b* ile *c* niceliklerini tam bölebilen nicelik *vc* ile *b-vc* ya da *d* niceliğini bölebilmenin *dl* ile *c-dl* ya da *e* niceliğini bölüp buradan *b* ile *c* niceliklerinden her birinin ortak böleni *d* niceliğini tamamen böldüğü görülür. Otuz altıncı maddedeki bölmeden aynı şekilde $b = v\,c + d$ ve $c = l\,d + e$ ve $d = r\,e$ olduğundan işte bu *e* niceliği *d* ve *dl* ve *e+dl* ya da c niceliğini bölüp bu şekilde bahsedilen nicelik *vc* ve *d+mc* ya da *b* niceliğini bölerek *b* ile *c* niceliklerinin her bir ortak böleni *e* niceliğini tamamen bölüp, bu *e* niceliği de *b* ile *c* niceliklerini tam bölerek onların **en büyük ortak böleni** olduğu görülür.

Örnek 1:

$b^2 + 2b + 1$ ve $b^3 + 2b^2 + 2b + 1$ çok terimlilerin en büyük ortak bölenlerinin çıkarımıyla $b^2 + 2b + 1 / b^3 + 2b^2 + 2b + 1$ kesrinin sadeleştirmesi bu şekildedir.

$$b^2 + 2b + 1 \;)\; b^3 + 2b^2 + 2b + 1 \;(\, b$$

$$b^3 + 2b^2 + b$$

$$\overline{}$$

$$b + 1 \;)\; b^2 + 2b + 1 \;(\, b + 1$$

$$b^2 + b$$

$$\overline{}$$

$$b + 1$$

$$b + 1$$

$$\overline{}$$

Bu takdirde *b+1* iki terimlinin en büyük ortak bölen terimi istenilen olup bahsedilen kesrin payıyla paydası işte bu çift terimli üzerine bölünerek $b + 1 / b^2 + 2b + 1$ kesrine döndürülüp sadeleştirilmiş olur.

Örnek 2:

$b^4 - x^4$ ile $b^3 - b^2x - bx^2 + x^3$ en büyük ortak bölenlerinin elde edilmesiyle $b^4 - x^4 / b^3 - b^2x - bx^2 + x^3$ kesrin sadeleştirmesi bu şekildedir.

$$b^3 - b^2x - bx^2 + x^3 \;)\; b^4 - x^4 \;(\, b + x$$

$$b^4 - b^3x - b^2x^2 + bx^3$$

$$\overline{}$$

$$b^3x + b^2x^2 - bx^3 - x^4$$

$$b^3x - b^2x^2 - bx^3 + x^4$$

$$\overline{}$$

$$2b^2x^3 - 2x^4 = 2x^2(b^2 - x^2)$$

İşte bu kalandan $2x^2$ sadeleştirilerek bölen $b^2 - x^2$ olup

$$
\begin{array}{l|l}
b^2 - x^2 \,) & b^3 - b^2x - bx^2 + x^3 \ (\, b - x \\
 & b^3 - bx^2 \\
\hline
 & \quad - b^2x + x^3 \\
 & \quad - b^2x + x^3 \\
\hline
\end{array}
$$

olup istenilen en büyük ortak bölen b^2-x^2 olarak bahsedilen kesir b^2+x^2/b-x kesrine dönüştürülüp sadeleştirilmiş olur.

Kaldı ki $2b^2x^2$-$2x^3$ böleninin her bir teriminde bulunan $2x^2$ niceliği b^3-b^2x-bx^2+x^3 bölüneninin her bir teriminde bulunmadığından **silmek** (*Hazf*) olur. Zira bahsedilen nicelik silinmese bölümün kesirli olması gerekir ki bu ise en büyük ortak bölen kuralı ispatına aykırı olmuş olur. O sebepten $2x^2$ niceliği bölünenin her bir teriminde bulunmadığından silinerek bölünen ve bölenin ortak bölenlerinden hiçbiri terk olunmuş olmaz.

(40) Çoğu işlemlerde iki veya daha fazla olan cebirsel niceliğin en büyük ortak bölenleri yukarıda zikredilen kuraldan daha ziyade daha kolay bir yol ile bulunur. Şöyle ki otuz dokuzuncu maddenin ikinci örneğinde olan b^4-x^4 *ile* b^3-b^2x-bx^2+x^3 niceliklerinin iş bu yolla en büyük ortak böleninin bulunması istense,

Birinci olarak, $b^4 - x^4 = (b^2 + x^2)(b^2 - x^2)$

İkinci olarak, $b^3 - b^2x - bx^2 + x^3 = b^2(b - x) - x^2(b - x)$
$= (b^2 - x^2)(b - x)$

Bu takdirde farz edilen iki niceliğin çarpanları olan b^2+x^2 ve b-x niceliklerinin birden başka en büyük ortak böleni olmadığından diğer çarpanı olan iş bu b^2-x^2 iki terimlisi en büyük ortak böleni olur.

(41) Bu şekilde bir kesrin payıyla paydasının sadeleştirilmesi için gereken en büyük ortak bölen kuralı uygulanmaksızın bahsedilen kesir sadeleştirilir.

Örnek 1:

İşbu $x^2 + 11x + 30 / 9x^3 + 53x^2 - 9x - 18$ kesrinin sadeleştirilmesi istenirse

$x^2 + 11x + 30 / 9x^3 + 53x^2 - 9x - 18$

$= x(x + 6) + 5(x + 6) / 9x^2(x + 6) - (x^2 + 9x + 18)$

$= (x + 5)(x + 6) / 9x^2(x + 6) - (x + 3)(x + 6)$

$= (x + 5)(x + 6) / (9x^2 - x - 3)(x + 6)$ olup işte bu kesrin payıyla paydası x+6 iki terimlisi üzerine bölündüğünde bahsedilen kesir $x + 5 / 9x^2 - x - 3$ kesrine dönüşerek sadeleştirilmiş olur.

Örnek 2:

Böyle bir $x^2 + (b + d)x + bd / x^2 + (c + d)x + cd$ kesrin sadeleştirilmesi istenirse; $x^2 + (b + d)x + bd = x^2 + bx + dx + bd$

$= x(x + b) + d(x + b)$

$= (x + d)(x + b)$ ve aynı şekilde

$x^2 + (c + d)x + cd = (x + d)(x + c)$ olarak $(x + b)(x + d) / (x + c)(x + d)$

kesrine dönüştürülüp payıyla paydasında ortak olan çarpanlar silindiğinde bahsedilen kesir $x + b / x + c$ olup sadeleştirilmiş olur.

Örnek 3:

$3b^2 - 3b^2c + bc^2 - c^3 / 4b^2 - 5bc + c^2$ kesrin sadeleştirilmesi istenirse

$3b^2 - 3b^2c + bc^2 - c^3 / 4b^2 - 5bc + c^2$

$= 3b^2(b - c) + c^2(b - c) / 4b(b - c) - c(b - c)$

$= (3b^2 + c^2)(b - c) / (4b - c)(b - c)$

$= 3b^2 + c^2 / 4b - c$

Örnek 4:

İşbu $(b + c)\{(b + c)^2 - d^2\} / 4c^2d^2 - (b^2 - c^2 - d^2)^2$ kesrin sadeleştirilmesi istenirse;

$(b + c)\{(b + c)^2 - d^2\} / 4c^2d^2 - (b^2 - c^2 - d^2)^2$

$= (b + c)(b + c + d)(b + c - d) / (2cd + b^2 - c^2 - d^2)(2cd - b^2 + c^2 + d^2)$

$= (b + c)(b + c + d)(b + c - d) / \{b^2 - (c - d)^2\}\{(c + d)^2 - b^2\}$

$= (b + c)(b + c + d)(b + c - d) / (b + c - d)(b - c + d)(b + c + d)(c + d - b)$

$= (b + c) / (b - c + d)(c + d - b)$

$= (b + c) / d^2 - (b - c)$

(42) Kesirli niceliklerin değerleri eşit ve paydaları ortak olan diğer kesirlere dönüştürmek için her bir kesrin payı ve kendi paydasından başka paydalara çarpılarak çarpım paya yazılıp ve paydaların çarpımı ortak paydaya yazılarak olur. Şöyle ki *b/c* ve *d/e* ve *v/q* kesirlerinden bir şekilde açıklanmış $b\ e\ q\ /\ c\ e\ q$ ve $e\ c\ q\ /\ c\ e\ q$ ve $v\ c\ e\ /\ c\ e\ q$ kesri ortaya çıkarak değeri ilk kesrin değerine eşit olup paydalarıda $c\ e\ q$ ortak paydası olmuş olur. Çünkü $b\ e\ q\ /\ c\ e\ q\ = b\ /\ c$ ve $d\ c\ q\ /\ c\ e\ q\ = d\ /\ e$ ve $v\ c\ e\ /\ c\ e\ q\ = v\ /\ q$ (madde 35) her bir kesrin payıyla paydası herhangi bir nicelik ile yani kesrin geri kalan paydalarının çarpım sonuçlarına çarpılarak bu şekilde tek payda olmuş olur.

2.2.8. Kesirli Niceliklerde Toplama ve Çıkarma

(43) Eğer toplamları istenen kesrin paydaları ortak ise payları toplamı alınıp, toplamın altına ortak paydalardan biri yazılır. Meselâ $\frac{b}{c} + \frac{d}{c} = \frac{b+d}{c}$ ve bu özellik otuz üçüncü maddede söylenen kurala göre düzenlenir.

(44) Eğer toplanacak kesirlerin paydaları ortak değil ise kesirlerin paydaları ortak diğer kesre nakil olur. (Madde 42) gibi olsa bu toplama işlemi yapılır.

Örnek 1:

$$\frac{b}{c} + \frac{d}{e} = \frac{b\,e}{c\,e} + \frac{c\,d}{c\,e} = \frac{b\,e + c\,d}{c\,e}$$

Örnek 2:

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-c}{b^2 - c^2} + \frac{b+c}{b^2 - c^2} = \frac{b - c + b + c}{b^2 - c^2} = \frac{2\,b}{b^2 - c^2}$$

Örnek 3:

$$\mathrm{b} + \frac{e}{q} = \frac{b\,q}{q} + \frac{e}{q} = \frac{b\,q + e}{q}$$

İşte bu örnekte *b* niceliği paydası bir olan bir kesir gibi ifade olunur ki herhangi bir sayı ile çarpılır veya bölünürse değeri değişmediği görülür.

Örnek 4:

$$2 + \frac{b+c}{b-c} + \frac{b-c}{b+c} = \frac{2\,b^2 - 2\,c^2}{b^2 - c^2} + \frac{b^2 + 2\,b\,c + c^2}{b^2 - c^2} + \frac{b^2 - 2\,b\,c + c^2}{b^2 - c^2}$$

$$= \frac{2\,b^2 - 2\,c^2 + b^2 + 2\,b\,c + c^2 + b^2 - 2\,b\,c + c^2}{b^2 - c^2} = \frac{4\,b^2}{b^2 - c^2}$$

(45) Eğer paydaları ortak olan iki kesrin farkları istenirse iki kesrin paylarının farkları alınıp, bu farkla ortak paydaların biri paydada kalarak yazılır.

Nitekim $\frac{b}{c} - \frac{d}{c} = \frac{b-d}{c}$ olduğu gibi (madde 33)

(46) Eğer kesirlerin paydaları ortak değil ise paydaları ortak hale getirilip sonra fark işlemini yapmak yeterlidir.

Örnek 1:

$$\frac{b}{c} - \frac{d}{e} = \frac{b\,e}{c\,e} - \frac{c\,d}{c\,e} = \frac{b\,e - c\,d}{c\,e}$$

Örnek 2:

$$b - \frac{d\,e}{c} = \frac{b\,c}{c} - \frac{d\,e}{c} = \frac{b\,c - d\,e}{c}$$

Örnek 3:

$$\frac{b}{c} - \frac{d+e}{d-e} = \frac{b\,d - b\,e}{c\,d - c\,e} - \frac{c\,d + c\,e}{c\,d - c\,e} = \frac{b\,d - b\,e - c\,d - c\,e}{c\,d - c\,e}$$

Bu üçüncü örnekte payında bulunan *c e* niceliğinin işareti eksidir. Çünkü ikinci kesrin her bir kısmının ilk kesirden çıkarılması gerekir.

Örnek 4:

$$\frac{b+c}{b-c} - \frac{b-c}{b+c} = \frac{b^2 + 2\,b\,c + c^2}{b^2 - c^2} - \frac{b^2 - 2\,b\,c + c^2}{b^2 - c^2}$$
$$= \frac{b^2 + 2\,b\,c + c^2 - b^2 + 2\,b\,c - c^2}{b^2 - c^2} = \frac{4\,b\,c}{b^2 - c^2}$$

2.2.9. Kesirli Niceliklerde Çarpma ve Bölme

(47) Bir kesrin bir nicelik ile çarpımında kesrin payı, bu nicelik ile çarpılıp, çarpımın sonucunun altına kesrin paydası yazılır.

Nitekim, $\frac{b}{c} \times d = b \times \frac{d}{c}$ olduğu gibi. Burada bölenler eşit olduğu halde herhangi bir bölünenden ilk bölünen *d* kere fazla olsa ilk bölümden son bölüm *d* kere fazla olur.

(Sonuç 1)) $\frac{b}{c} \times c = b \times \frac{c}{c} = b$ olduğundan eğer bir kesrin payı paydasıyla çarpılırsa çarpımın sonucu paya eşit olur.

(Sonuç 2) Bir kesrin payı, bir nicelik ile çarpılırsa ya da paydası bölünürse sonuçlar birbirinin aynıdır. Varsayalım, be/cd kesrinin payı bir d niceliğiyle çarpılsa çarpımın sonucu bed / cd ya da be/c olur. (Madde 35) Kesrin paydası d üzerine bölünecek olsa bölüm aynısıdır.

(48) İki kesrin çarpımlarının sonucu; payları birbiri ile çarpılıp paya ve paydaları birbiri ile çarpılıp paydaya yazılarak kesir oluşmuş olur.

Örneğin; b/c ile d/e kesirlerinin çarpımı bd / ce olur.

Çünkü $b/c=x$ ve $d/e=z$ olsa b/c ile x iki eşitliği c niceliğiyle çarpıldığında $b = cx$ olur. (Açıklama 3) ve bu şekilde $d=ez$ olup zikredilen açıklamaya göre $bd = cexz$ olarak her iki taraf ce üzerine bölündüğünde $bd /ce = xz = b/c \times d/e$ olur. Zira $b/c = x$ ve $d/e = z$ (Açıklama 4) olup çarpım sabit olur.

(49) Bir kesrin, bir niceliğe bölünmesi istendiğinde kesrin paydası ile çarpılıp çarpımın sonucu kesrin payına payda olur. Nitekim; b/c kesri d niceliğine bölünse bölüm b/cd olur. Çünkü $b/c=bd/cd$ olur. Bu kesrin bir parçası alındığında b/cd kesri olur ve pay ilk payın d parçası ve payda ilk paydanın d misli olmuş olur.

(50) Bir kesri, diğer kesire böldüğümüzde bölenin payıyla paydası ters çevrilip istenilen kesir bölünen ile çarpılma kuralıyla çarpılır.

Örneğin, b/c ve d/e kesirlerinin birbirine bölümü: $b/c \div d/e = b/c \times e/d = be / cd$ olur. Çünkü $b/c = x$ ve $d/e = z$ farz olunsa kırk sekizinci maddede olduğu gibi $b = cx$ ve $d = ez$ olur. Aynı şekilde $be = cex$ ve $cd=cez$ olduğundan (Açıklama 4) $be/cd = cex/cez = x/z = b/c \div d/e$ olur.

(51) Bir niceliğin çeşitli kuvvetlerinin çarpımı için yirmi beşinci maddede ispatlanan kural, negatif kuvvetler (*kuvvey-i menfiye*) için de geçerli olur. Şöyleki, $b^m \times b^{-n} = b^{m-n}$ çünkü $b^m \times b^{-n} = b^m \times 1/ b^n = b^m / b^n = b^{m-n}$ şeklinde, $b^3 \times b^{-5} = b^3 / b^5 = 1/ b^2 = b^{-2}$ ve $b^{-m} \times b^{-n} = b^{-(m+n)}$ şeklinde olur. Zira $b^{-m} \times b^{-n} = 1/b^m \times 1/b^n = 1/ b^{m+n} = b^{-(m+n)}$ dir.

(Sonuç) Eğer *m* niceliği *n* niceliğine eşit olsa $b^m \times b^{-m} = b^{m-m}$ olur. Aynı şekilde $b^m \times b^{-m} = b^m / b^m = 1$ olduğundan işlemin sonucu 1 olur.

(52) Bir niceliğin herhangi iki kuvvetinin birbirine bölümü, otuz ikinci maddede ispat olunan kurala göre bir niceliğin negatif değerleri için de geçerli olur.

Şöyle ki, $b^m \div b^{-n} = b^m \div (1/b^n) = b^m \times b^n = b^{m+n}$
ve yine $b^{-m} \div b^{-n} = (1/b^m) \div (1/b^n) = b^n / b^m = b^{n-m}$ (madde 31) olur.

(Sonuç) buradan da herhangi bir çarpanın üssünün işaretinin değiştirilmesiyle bir kesrin payından paydasına ve paydasından payına nakil olabildiği görülür.

Nitekim, $(b^m \times b^n)/c^q = b^m/(b^{-n} \times c^q)$ ve $b^m/(b^n \times c^q) = (b^m \times b^{-n})/c^q = b^m \times b^{-n} \times c^{-q}$ niceliklerinde olduğu gibi.

2.2.10. Cebirsel Niceliklerin Kuvvetleri ve Karekökleri

(53) Eğer bir nicelik kendisiyle çarpılsa çarpıma o niceliğin üssü (kuvveti) denir. Üss, yani kuvvet, çarpanın kaç defa çarpıldığını ifade eder. Şöyle ki, $b \times b$ ya da b^2 niceliği *b* niceliğinin ikinci kuvveti ve $b \times b \times b$ ya da b^3 niceliği *b* niceliğinin üçüncü kuvveti ve $b \times b \times b \times b \times \ldots\ldots$ *n* adet çarpana değin ya da b^n niceliği *b* niceliğinin *n.*ci kuvveti olmuş olur.

(54) Eğer üssü istenilen nicelik eksi olur ise niceliğin çift kuvvetlere üssü pozitif, tek kuvvetlere üssü negatiftir.

$-b \times -b = b^2$ ve $-b \times -b \times -b = -b^3$ olur.

(55) Basit tekli bir niceliğin herhangi kuvveti üssü nicelikte bulunan çarpanlardan her birinin üssü istenilen kuvvet ile çarpılıp işareti yukarıda söylenen madde gereğince belirlenerek önüne yazmakla olur. Şöyle ki b^m niceliğinin *n.* kuvvete yükseltilmesi b^{mn} olur.

Zira $b^m \times b^m \times b^m \times \ldots\ldots\ldots$ *n* adet çarpana değin kurala göre çarpılmak üzere $b^{m+m+m\ldots\ldots}$ *n.* terime değin ya da b^{mn} olur. Aynı şekilde $(bc)^n = bc \times bc \times bc \times \ldots\ldots$ *n.* çarpana değin ya da $b \times b \times b \times \ldots\ldots$ *n.* çarpana değin $c \times c \times c \times \ldots\ldots$ *n.* çarpana değin (madde 22) $= b^n \times c^n$ olup ve $b^2 c^3 d$ niceliğinin beşinci kuvveti alındığında $b^{10} c^{15} d^5$ olur. Aynı şekilde $-b^m$ niceliğinin *n.* kuvveti alındığında $\pm b^{mn}$ olarak *n* niceliğinin çift veya tek olduğuna bakarak işaretinin + veya - olması lâzım gelir. Ve bu husus cebir kuralları üzere bu şekildedir.

$(-b^m)^n=(-1)^n b^{mn}$ diye gösterilir.

(56) Eğer üssü istenilen nicelik kesir olur ise kesrin payıyla paydasının istenilen kuvveti alınır. (madde48)

Nitekim, $(b/c)^n= b^n / c^n$ kesrinde olduğu gibi.

(57) Eğer üssü istenilen nicelik, çoklu nicelikten olur ise üss işlemi doğrudan yapılır. Ya da özel bir üss verilerek bu kuvvet ile işlem yapılır.

Örneğin; $b + c$ iki terimlisinin herhangi kuvveti alınmak istenirse

$$\begin{array}{l} b+c \\ b+c \\ \hline b^2+bc \\ \quad +bc+c^2 \\ \hline \end{array}$$

$(b+c)^2$ ya da $b^2+2bc+c^2$ karesi ya da ikinci kuvvet

$$\begin{array}{l} b+c \\ \hline b^3+2b^2c+bc^2 \\ \quad +b^2c+2bc^2+c^3 \\ \hline \end{array}$$

$(b+c)^3$ ya da $b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$ üçüncü kuvvet

$$\begin{array}{l} b+c \\ \hline b^4+3b^3c+3b^2c^2+bc^3 \\ \quad +b^3c+3b^2c^2+3bc^3+c^4 \\ \hline \end{array}$$

$(b+c)^4$ yahud $b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4$dördüncü kuvvet

Ve bunun gibi diğer kuvvetleri de alınır. Eğer c niceliği negatif yani üssü istenilen iki terimlisi $b - c$ olmuş olsa üss sonucu da c niceliğinin tek kuvvetlerini kapsayan terimler negatif ve çift kuvvetlerini kapsayan terimler pozitif olur. Buna göre:

$(b-c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$

$(b-c)^3 = b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$

$(b-c)^4 = b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4$

olup iki terimlisinin diğerleri buna göre karşılaştırılır.

(58) İstenilen kuvvete yülseltilmesi ile bilinen niceliği oluşturan niceliğin elde edilmesi yöntemine **kök alma** denir. Farzedelim, b^m niceliğinin n. kuvveti b^{mn} niceliği ve b^m niceliği de b^{mn} niceliğinin n. kuvvetinden kökü olmuş olup buradan herhangi bir basit cebirsel niceliği kökten çıkarmak için cebirsel niceliğin üssünün daima istenilen kuvvete bölündüğü görülür.

(59) Şimdi kökü istenilen cebirsel niceliğin üssü kökü gösteren sayı ile tamamen bölünmesi mümkün değil ise kökü istenilen sayının bilfiil kökü alınamayarak on ikinci maddede tarif olunduğu üzere sadece gösterilir.

Şöyle ki b^2+x^2 iki terimlisinin karekökü ve küpkökü ve dördüncü kuvvetten kökü ve n. kuvvetten kökü diye devam eder. İşte $(b^2+x^2)^{1/2}$ ve $(b^2+x^2)^{1/3}$ ve $(b^2+x^2)^{1/4}$ ve $(b^2+x^2)^{1/n}$ nicelikleriyle gösterilir. $1/ b^2+x^2$ ya da $(b^2+x^2)^{-1}$ niceliğinin de birçok kökü şu şekilde $(b^2+x^2)^{-1/2}$ ve $(b^2+x^2)^{-1/3}$ ve $(b^2+x^2)^{-1/4}$ ve $(b^2+x^2)^{-1/n}$ nicelikleriyle gösterilir.

(60) Eğer bir niceliğin kökü tek kuvvetten alınıyor ise kökün ortaya çıkan sonucunun işareti (madde 54)'te görüldüğü üzere kökü alınan niceliğin işaretinin aynısı olur. Meselâ $\sqrt[3]{8} = 2$ ve $\sqrt[3]{-8} = -2$ olur. Diğerleri de bunun gibidir.

(61) Eğer kökü istenilen çift kuvvetten ise kökün sonucunun işaretleri ikisi de mümkün olur. Zira bir nicelik pozitif olsun veya negatif olsun çift kuvvete üssü alındığında sonuç pozitif olur. Şöyle ki, $\sqrt{b}^2 = \pm\, b$ ve $\sqrt[4]{(b+c)}^8 = \pm\, (b+c)^2$ olur.

(62) Eğer varsayılan (*mefruz)* kök çift bir sayı ile gösterilerek kökü istenilen niceliğin işareti negatif olur ise zikredilen kökün alınması mümkün değildir. Zira çift kuvveti alınarak negatif sayı oluşturulamayacağından bu tür niceliklere **kemiyât-ı muhdise ve muhterʿa** (***karmaşık sayılar***) yazılır.

(63) Cebirsel niceliklerin çarpımlarının sonuçlarının kökünün alınması, çarpanlarından her birinin kökü alınarak işbu kökü alınmış çarpanların birbirleriyle çarpılmasıyla olur.

Meselâ, $(bc)^{1/n}=b^{1/n} \times c^{1/n}$ zira (madde 55) iş bu çarpanlardan her birinin *n.* kuvveti alındığında *bc* elde edilmiş olur.

Sonuç, eğer $b=c$ olsa $b^{1/n} \times b^{1/n} = b^{2/n}$ olur.

Aynı şekilde $b^{x/n} \times b^{r/n} = b^{x+r/n}$ olur.

(64) Herhangi bir kesrin kökü, payıyla paydasının köklerinin alınması ile olur. Yani payın kökü pay ve paydanın kökü payda olur.

Şöyle ki, b^2/c^2 kesrinin küpkökü $b^{2/3}/c^{2/3}$ ya da $b^{2/3} \times c^{-2/3}$olur.

Aynı şekilde $(b/c)^{1/n} = b^{1/n} / c^{1/n}$ ya da $b^{1/c} \times c^{-1/c}$ olur.

(65) Kuvveti alınan bir nicelik karekökünden çıkarılmak istendiğinde ilk olarak $b^2+2bc+c^2$ üç terimlisinin karekökü (madde57) *b* ile *c* niceliklerinin her bir değeri için $b+c$ olduğundan iş bu $b^2+2bc+c^2$ üç terimlisinden *b* ile *c* niceliklerinin ne şekilde elde edilebildiğine dikkat edilerek karekök alınması için bir genel kural elde edilebilir.

Şöyle ki, yukarıda ifade edilen çok terimli *b* niceliğinin kuvvetlerine bakıldığında bu şekilde düzenlenir.

$b^2 + 2bc + c^2 \; (b + c$

b^2

$2bc + c^2$

$2bc + c^2 \; (2b + c$

İlk terimi olan *b*'nin karekökü *b,* kökü istenilenin ilk terimi *b* olup, iş bu ilk terimin karesi varsayılan çok terimliden çıkarılıp geri kalan $2bc + c^2$ bir çizgi çekilerek altına yazılır. İş bu kalanın ilk terimi olan $2bc$ niceliği istenilen kökün ilk teriminin iki misli olan $2b$ üzerine bölünerek bölüm olan *c* niceliği bahsedilen kökün ikinci terimi olur. İlk terimin iki misliyle ikinci terim toplanırsa $2b + c$ iki terimlisi ikinci terim olan c niceliğiyle çarpılıp çarpımın sonucu olan bu $2bc + c^2$ niceliği kalandan çıkarılır. Eğer kökü istenilen nicelikte üçten fazla terim bulunur ise ilk $b+c$ niceliği b niceliğinin son değeri gibi tasavvur olunup karesi olan $b^2+2bc+c^2$ niceliği yukarıda gösterilen işlemin ilk parçasında olduğu gibi kalandan çıkarılıp, çıkarmadan kalan $b+c$ niceliğinin iki misli üzerine bölünerek bölüm, adı geçen parçanın son terimi olmuş olur.

İkinci olarak adı geçen kökün önce elde edilen iki terimi toplamının iki misliyle bu son terim toplanıp, bu toplam son terim ile çarpıldığında çarpma işleminin sonucu elde edilmiş olur. Bu işlem, gerçek kökün veya tahmini kökün değerine değin tekrar olunur.

Örnek 1: işbu $b^2 + 2bc + c^2 + 2bd + 2cd + d^2$

Birçok terimlinin karekökü alınmak istenirse zikredilen terimlerde b harfinin kuvvetlerine bakıp düzenlenerek $b^2 + 2(c + d)b + c^2 + 2cd + d^2$ olup yukarıda ifade edilen kural gereği aşağıdaki gibi yapılır.

$b^2 + 2(c + d)b + c^2 + 2cd + d^2 \ (b + (c + d)$

b^2

$2(c + d)b + c^2 + 2cd + d^2 \ 2b + (c + d)$

$2(c + d)b + c^2 + 2cd + d^2$

Bu takdirce kökü istenilen $b + c + d$ olmuş olur.

Örnek 2: b^2-bx+ $x^2/4$ üç terimlisinin karekökü nasıl bulunur?

$b^2 - bx + x^2/4 \ (b - x/2$

b^2

$-bx + x^2/4 \ (2b - x/2$

$-bx + x^2/4$

Kökü istenilen $b - x/2$ olup istenilen elde edilmiş olur.

Örnek 3: İş bu *1 + x* iki terimlisinin karekökü nasıl alınır?

$1 + x$ ($1 + x / 2 - x^2 / 8$ + lh

1

---

x $\quad$ $2 + x / 2$

$x + x^2 / 4$

$- x^2 / 4$ $\quad$ $2 + x - x^2 / 8$

$- x^2 / 4 - x^3 / 8 + x^4 / 64$

$x^3 / 8 - x^4 / 64$ lh

Sonuç eğer herhangi $b+c$ iki terimlisinin karekökü istenirse,

çünkü $b + c = b\,(1 + c / b)$ olduğundan $\sqrt{b + c} = \sqrt{b}\,\sqrt{1 + c / b}$ (madde 63)

önceki örnekte x yerine c/b yazılarak $\sqrt{1 + c / b} = 1 + c /2\, b - c^2 /8\, b^2$ + lh

$\sqrt{b + c} = b^{1/2} + c /2\, b^{1/2} - c /8\, b^{3/2}$ + lh olur.

(66) İkinci misalden görüldüğü üzere b^2-bx+ $x^2/4$ gibi herhangi bir üç terimlide ortadaki terimin karesi, ilk terim ile son terimin çarpımının sonucunun dört katına eşit olursa, bu üç terimli **tam kare** olmuş olur.

(67) Küpkökü almak için kural karekökü almada olduğu gibi olur. Şöyle ki, $b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$ dört terimlinin küpkökü $b + c$ olduğu (57 ve 58) maddelerinden görüldüğünden iş bu dört terimliden $b + c$ niceliğinin çıkması istense aynı eskisi gibi sıralanıp ilk terim olan b^3 miktarının küpkökü b olduğundan kökün ilk terimi olmuş olur. Yukarıda iş bu ilk terimin küpü zikredilen terimden çıkarılıp kalanın ilk terimi $3b^2$ üzerine bölünmesiyle bölüm c zikredilen kökün ikinci terimi olarak zikredilen kalandan $3b^2c+3bc^2+c^3$ niceliği çıkarıldığında hiçbir şey kalan kalmadan zikredilen kökün $b + c$ olduğu aşikârdır. Eğer iş bu ikinci çıkarmadanda birşey kalırsa $b + c$ kökünü b makamında farz edip zikredilen kalanın ilk terimi işbu $3\,(b + c)^2$ üzerine bölünerek zikredilen kökün üçüncü terimi elde edip bu minval üzere diğer terimlerde istenilen hasıl olur.

Örnek:1

$8x^3+6xy^2-12x^2y-y^3$ çok terimlisinin küpkökü istenilendir.

$8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$ / $2x-y$

$8x^3 = b^2$

$-12x^2y+6xy^2-y^3$ / $3\ b^2 = 12\ x^2$

$-12x^2y = 3b^2c$

$+6xy^2 = 3bc^2$

$-y^3 = c^3$

Bu takdirce küpkökü istenilen $2x-y$ olmuş olur.

2.2.11. İrrasyonel Nicelikler

(68) Rasyonel olan bir niceliği irrasyonel gruba almak için zikredilen niceliğe irrasyonel kökü gösteren kuvvete yükseltip önüne irrasyonel işareti konur.

Nitekim $b = \sqrt{b^2} = \sqrt[3]{b^3}$ ve $b + x = (b + x)^{m/m}$ niceliklerinde olduğu gibi ve bu yol ile herhangi bir nicelik irrasyonel gruba değiştirilebilir.

Şöyle ki; $(b + x)^{1/2} = (b+x)^{2/4} = (b+x)^{3/6}$ ve aynı şekilde olur. Çünkü çeşitli nicelikler çok sayıda kuvvete yükseltilip yukarıda zikredilen niceliğin kökleri alınmakla zikredilen niceliğin değerleri asla değişmez.

(69) Herhangi bir irrasyonel nicelik örneği (madde 63) mevcubunca bir irrasyonel gruba dönüştürülüp sonra irrasyonel nicelik ile çarpılarak irrasyonel nicelik altına dahil edilebilir.

Örnek:

$b\sqrt{x} = \sqrt{b^2} \times \sqrt{x} = \sqrt{b^2 x}$

$b\,y^{3/2} = (b^2 y^3)^{1/2}$

$x\sqrt{2\,b - x} = \sqrt{2\,b\,x^2 - x^3}$

$b \times (b - x)^{3/2} = \{ b^2 \times (b - x)^3 \}^{1/2}$

$4\sqrt{2} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{32}$

(70) Ve bilakis kök içinde bulunan ve kök dışına çıkamayan bir nicelik, irrasyonel niceliğe örnek gösterilebilir. Ancak zikredilen irrasyonel niceliğin kökünü gösteren kuvvete yükseltilip ortaya çıkan üs ile kök içindeki durum her bir terim bölünmesi mümkün olur.

Şöyle ki, $\sqrt{b^2 - b\,x} = b^{1/2}\sqrt{b-x}$ ve $\sqrt{b^3 - b^2x} = b\sqrt{b-x}$ ve

$(b^2 - x^2)^{1/n} = b^{2/n}(1 - x^2 / b^2)^{1/n}$ ve $\sqrt{60} = \sqrt{4x15} = 2\sqrt{15}$ ve

$(1 / c^2 - 1 / b^2)^{1/2} = 1 / c\sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}$ olur.

2.2.12. İrrasyonel Niceliklerde Toplama ve Çıkarma

(71) Şimdi irrasyonel niceliklerin irrasyonel olan kısımları yani kök içinde bulunan parçaları eşit olursa, aralarındaki toplama veya çıkarma işlemleri yapıldığında irrasyonel kökün önüne kök dışındaki sayılar toplama ya da çıkarma işlemi halinde yazılarak oluşturulur.

Şöyle ki; $b\sqrt{x} \pm c\sqrt{x} = (b \pm c)\sqrt{x}$

$10\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$ ya da $5\sqrt{3}$ olur.

Eğer farz edilen irrasyonel niceliklerin irrasyonel kısımları birbirine eşit değil ise zikredilen nicelikler bazen başka irrasyonel niceliklere dönüştürülebilir ki irrasyonel parçaları birbirine eşit olur.

Örneğin; $\sqrt{3\,b^2c}$ ve $\sqrt{3\,c}$ niceliklerinin toplamları istense;

$\sqrt{3\,b^2c} = \sqrt{b^2} \times \sqrt{3\,c} = b\sqrt{3\,c}$ olduğundan

$\sqrt{3\,b^2c} + \sqrt{3\,c} = b\sqrt{3\,c} + \sqrt{3\,c} = (b + 1)\sqrt{3\,c}$ olur.

Eğer zikredilen irrasyonel niceliklerin irrasyonel kısmı birbirine eşit olan diğer niceliklere dönüştürülmesi mümkün değil ise zikredilen niceliklerin aralarına + ve - işaretlerinin yazılması yeterlidir.

2.2.13. İrrasyonel Niceliklerin Çarpımı

(72) Eğer iki irrasyonel niceliğin kök üsleri eşit olsa onların çarpım sonucu kök içinde olan niceliklerin çarpım sonucuna eşit olur. Kök üssüde zikredilen iki niceliğin **ortak kök üssü** olmuş olur.

Şöyle ki, , $\sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} = b^{1/n} \times c^{1/n} = (b\,c)^{1/n}$ (madde 63) $= \sqrt[n]{b\,c}$

$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

$(b + c)^{1/2} \times (b - c)^{1/2} = (b^2 - c^2)^{1/2}$

$\sqrt[3]{b + x} \times \sqrt[3]{b - x} = \sqrt[3]{b^2 - x^2}$ olur.

(73) Eğer irrasyonel niceliklerin çarpımlarında çarpan ile çarpılanın katsayıları bulunursa iş bu katsayıların çarpım sonuçları alınıp irrasyonel niceliğin çarpım sonucunun önüne konulur.

Şöyle ki, $b\sqrt{x} \times c\sqrt{y} = b\,c\sqrt{x\,y}$ olduğu gibi.

(74) Eğer iki irrasyonel niceliğin üslerinin paydaları ortak olsa zikredilen iki nicelik kendi ve üsleri paylarının yazıldığı kuvvetlere yükseltilip iş bu zikredilen iki niceliğin önceki olayda olduğu gibi çarpım sonuçları elde edilmiş olur.

Örnek; $2^{3/2} \times 3^{1/2} = 8^{1/2} \times 3^{1/2} = (24)^{1/2}$

$(b{+}x)^{1/2} \times (b{-}x)^{3/2} = \{ (b{+}x)\,(b{-}x)^3\}^{1/2}$ olur.

(75) Eğer iki irrasyonelin üslerinin paydaları ortak değil ise zikredilen iki niceliğin değerleri eşit ve üslerinin paydaları ortak olan iki niceliğin diğerine değiştirilip sonra çarpım sonuçları (madde 74) ‘teki gibi elde edilir.

Örnek 1; $(b^2{-}x^2)^{1/4} \times (b{-}x)^{1/2} = (b^2{-}x^2)^{1/4} \times (b{-}x)^{2/4} = \{(b^2{-}x^2) \times (b{-}x)^2\}^{1/4}$

Ve yine $2^{1/2} \times 3^{1/3} = 2^{3/6} \times 3^{2/6} = (8 \times 9)^{1/6} = (72)^{1/6}$ olur.

(76) Eğer iki irrasyonel niceliğin kök içinde bulunan parçalarının rasyonelleri birbirinin aynı olsa onların çarpım sonuçları zikredilen iki niceliğin üsleri toplamına o niceliklerden birinin yükseltilmesiyle elde edilmiş olur.

Şöyle ki; olup $\sqrt[n]{b} \times \sqrt[m]{b} = b^{1/n} \times b^{1/m} = b^{1/n + 1/m} = b^{m/m\,n + n/m\,n}$

(madde 68) $= b^{m + n/mn}$ iş bu durum 63. maddede de görülür.

Örnek 1; $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} = 2^{3/6+2/6} = 2^{5/6}$olur.

2.2.14. İrrasyonel Niceliklerin Bölümü

(77) Eğer iki irrasyonel niceliğin üslerinin paydaları ortak olsalar onların bölümleri zikredilen iki nicelikten her birinin kendi ve üssünün payının yazıldığı kuvvete yükseltildikten sonra birbiri üzerine bölünür. Sonrada üssün ortak paydasına gösterildiği kuvvetten bölümün kökü alınmakla elde edilmiş olur.

Şöyle ki; $b^{1/n} / c^{1/n} = (b/c)^{1/n}$ ve $b^{m/n} / c^{q/n} = (b^m)^{1/n} / (c^q)^{1/n} = (b^m / c^k)^{1/n}$

(Madde 64) olup meselâ $4^{1/2} \div 2^{3/2} = (4/8)^{1/2} = 1/\sqrt{2}$

$(q / l)^{1/m} \div (r / x)^{2/m} = (q\, x^2 / l\, r^2)^{1/m}$ olur.

(78) Eğer iki irrasyonel niceliğin üslerinin paydaları ortak değil ise bu iki niceliğin değerleri eşit ve üslerinin paydaları ortak olan diğer iki niceliğe nakil olunup önceki gibi bölme işlemi yapılır.

Meselâ, $(b^2\text{-}x^2)^{1/2} \div (b^3\text{-}x^3)^{1/3} = (b^2\text{-}x^2)^{3/6} \div (b^3\text{-}x^3)^{2/6} = \{(b^2\text{-}x^2)^3 \div (b^3\text{-}x^3)^2\}^{1/6}$

(79) Eğer iki irrasyonel niceliğin kök içlerinde bulunan rasyonel kısımları birbirinin aynı olursa onların bölümleri zikredilen niceliklerin üsleri aralarında olan farka o niceliklerden birinin yükseltilmesiyle elde edilir.

Şöyle ki; $\sqrt[n]{b}$ niceliğinin $\sqrt[m]{b}$ niceliği üzerine bölünmesi;

yani $\sqrt[n]{b} \div \sqrt[m]{b} = b^{1/n} \div b^{1/m} = b^{1/n-1/m} = b^{m/n-n/m} = b^{m-n/mn}$ niceliğine eşittir.

Zira iş bu iki niceliğin *mn* kuvvetine yükseltilmesi ile toplam üsler $b^m \div b^n$ ve b^{m-n} olarak birbirine eşit olmuş olur.

Meselâ, $2^{1/2} : 2^{1/3} = 2^{3/6} : 2^{2/6} = 2^{1/6}$ olduğu gibi.

2.2.15. İrrasyonel Niceliklerin Kuvvetinin ve Köklerinin Alınması

(80) Bir irrasyonel niceliğin herhangi kuvvete yükseltilmesi, irrasyonel üssün istenilen kuvvet ile çarpılmasıyla elde edilir.

Şöyle ki, $(\sqrt[n]{b}\,)^m = (b^{1/n})^m = b^{1/n+1/n+1/n+1/n\ldots\ldots m}$.terime kadar $b^{m/n}$ olur.

(81) Bir irrasyonel niceliğin herhangi kuvvetten kökü, irrasyonel üssü istenilen kuvvete bölünmesiyle elde edilir.

Şöyle ki, $\sqrt[m]{(n\sqrt{b}\,)} = \sqrt[m]{b}^{\;1/n} = b^{\;1/n\,m}$ olur. Zira bu niceliklerden her biri *m*. kuvvete yükseltildiğinde üsleri birbirine eşit olmuş olur. Buradan görülür ki irrasyonel nicelikler hakkında buraya kadar koyulan ya da kurulan çok sayıda kural, kesirli kuvvetlere yükseltilmiş olan nicelikler hakkında da geçerli olur.

2.2.16. İrrasyonel Niceliklerin Dönüştürülmesi (Tahvil)

(82) Karekökü kapsayan verilen herhangi bir nicelikten diğer niceliğin elde edilmesi istenir ise bu ikinci nicelik ilk nicelik ile çarpıldığında çarpım sonucu bir rasyonel nicelik olur.

Birinci olarak eğer verilen nicelik $3\sqrt{b}$ gibi bir irrasyonel tek sayı ise istenilen çarpanı $\sqrt{b}$ olup çarpım sonucu da rasyonel olarak $3b$ olmuş olur.

İkinci olarak verilen nicelik $\sqrt{b} + \sqrt{c}$ gibi iki terimli irrasyonel ise istenilen çarpanı $\sqrt{b} - \sqrt{c}$ olup çarpım sonucu $b - c$ olmuş olur.

Üçüncü olarak eğer verilen nicelik $\sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ gibi üç terimli ise; evvelâ $\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d}$ ile çarpılarak $(\sqrt{b} + \sqrt{c}\,)^2 - (\sqrt{d}\,)^2$ ya da $b + c - d + 2\sqrt{b\,c}$ olup sonra bu sonuç $b + c - d - 2\sqrt{b\,c}$ çarpıldığında, çarpım sonucu $(\,b+c-d)^2 - 4bc$ olarak istenilen çarpanı $(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d}\,)$ x $(b + c - d - 2\sqrt{b\,c})$ olduğu görülür. Bu kuralın kullanılmasıyla paydaları irrasyonel olan kesirlerin değerleri kolaylıkla belirlenebilir.

Örneğin $1 / \sqrt{3} + \sqrt{2}$ kesrinin yedinci basamağına kadar değeri yaklaşık olarak çıkarılmasında 2 ile 3 sayılarının kökleri alınıp, bu köklerin toplamları üzerine tek işlemle bölünse maksad oluşur ise de yapılan işlem uzun ve zor olduğundan zikredilen kurala tatbiken kesrin önce payı $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ile çarpılarak $\sqrt{3} - \sqrt{2}\,/\,3-2$ yada $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ elde edilip 3 ile 2 sayılarının karekökleri alınıp karekökü alınmış sayıları birbirinden çıkarıldığında istenilen elde edilip işlem bölme sıkıntısından da tamamen kurtulmuş olur.

Aynı şekilde, $\sqrt[3]{2}\,/\,\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3}\,/\,(\sqrt[3]{3}\,)^3 = \sqrt[3]{18}\,/3$

Ve $\sqrt[r]{b}$ / $\sqrt[r]{c} = (b^{1/r} \times c^{1-r/r}) / (c^{1/r} \times c^{1-r/r}) = \sqrt[r]{b\, c^{r-1}} / c$

Kesirden her birinin kolaylıkla hesaplanması için bunun gibi sadeleştirilir. *Genel kural*.

(83) Tek terimi ya da iki terimi irrasyonel olan herhangi bir iki terimliyi rasyonel hale getirmek için çarpanın elde edilmesi şöyledir:

Birinci olarak x ve y bilinmeyenlerinden biri ya da ikisi de irrasyonel olarak $x + y$ bir iki terimlisinin gösterimi varsayılsın ve m'de öyle bir sayı olsun ki x^m ve y^m niceliklerinden her biri rasyonel olsun.

Bu durumda $x^m \pm y^m = (x + y)(x^{m-1} - x^{m-2}y + \ldots \pm xy^{m-2} \pm y^{m-1})$ olup m tane varsayıldığında işaretleri yukarı alınıp, çift olduğuna göre alttaki işaret alınarak bu iki terimliyi rasyonel kılmak için istenilen çarpanı $x^{m-1} - x^{m-2}y + \ldots \pm xy^{m-2} \pm y^{m-1}$ olur.

İkinci olarak bu iki terimli $x - y$ olup ve m taneyi önceki gibi varsayıldığında 33. maddenin beşinci açıklamasında olduğu gibi;

$x^m - y^m = (x - y)(x^{m-1} - x^{m-2}y + \ldots \pm xy^{m-2} \pm y^{m-1})$ olup bu bölümde de çarpanı istenilen $x^{m-1} - x^{m-2}y + \ldots \pm xy^{m-2} \pm y^{m-1}$ olmuş olur.

Örnek 1;

$\sqrt{5} - \sqrt[3]{6}$ iki terimlisini rasyonel kılmak için çarpanın elde edilmesi,

bu derecede m=6 olduğunda istenilen çarpanı

$= (\sqrt{5})^5 + (\sqrt{5})^4 \times \sqrt[3]{6} + (\sqrt{5})^3 \times (\sqrt[3]{6})^2 + (\sqrt{5})^2 \times (\sqrt[3]{6})^3 + \sqrt{5} \times (\sqrt[3]{6})^4 + (\sqrt[3]{6})^5 =$

$25\sqrt{5} + 25\sqrt[3]{6} + 5\sqrt{5} + (\sqrt[3]{6})^2 + 30 + 6\sqrt{5} \times \sqrt[3]{6} + 6(\sqrt[3]{6})^3$ olup istenilen sabit olur.

(84) Bir niceliğin karekökü kısmen rasyonel ve kısmen irrasyonel olamaz.

Örneğin, $\sqrt{n} = b + \sqrt{m}$ olsun, bu eşitliğin iki tarafındaki iki niceliğin karesi alındığında $n = b^2 + 2b\sqrt{m} + m$ olur.(Açıklama 3) , $2b\sqrt{m} = n - b^2 - m$ olur. (Açıklama 2) $\sqrt{m} = n - b^2 - m / 2b$ bir rasyonel nicelik olur. Bu ise varsaydığmızın tersi olur.

(85) Eğer kısmen rasyonel ve kısmen irrasyonel olan herhangi iki nicelik birbirine eşit olursa, her iki tarafta bulunan rasyonel nicelikler ve aynı şekilde irrasyoneller birbirine eşit olur.

Örneğin, $x + \sqrt{y} = b + \sqrt{c}$ olsa $x = b$ olup ve $\sqrt{y} = \sqrt{c}$ *olur*. Eğer x niceliği b niceliğine eşit değil ise:

Örneğin, $x = b + m$ olsa buna göre $b + m + \sqrt{y} = b + \sqrt{c}$ ya da $m + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ olur ise $\sqrt{c}$ irrasyoneli kısmen rasyonel kısmen irrasyonel olması gerekir. Bu ise (madde 84)'e uymaz. Bundan dolayı $x = b$ ve aynı şekilde $\sqrt{y} = \sqrt{c}$ olup istenilen sabit olur.

(86) Eğer iki irrasyonel karenin $\sqrt{x}$ ve $\sqrt{y}$ irrasyonel kısımlarının birbirinin aynı olan irrasyonelin diğerine döndürülmeleri mümkün değil ise onların çarpım sonucu irrasyonel olmuş olur. Çünkü $\sqrt{x\,y} = r\,x$ varsayıldığında $xy = r^2x^2$ olup her iki taraf x niceliği üzerine bölündüğünde $y = r^2x$ olduğundan her iki tarafın kökü alındığında $\sqrt{y} = \sqrt{r^2x}$ olup $\sqrt{y}$ ve $\sqrt{x}$ irrasyonellerinin her biri bu şekilde döndürülebilir. Ancak irrasyonel kısımları birbirine eşit olursa bu durum, varsayımımıza uymaz.

(87) Bir irrasyonel nicelik, örneğin $\sqrt{x}$, irrasyonel kısımları birbirinin aynı olmayan $\sqrt{m}$ ve $\sqrt{n}$ gibi sadece diğer iki irrasyonelden oluşamaz. Çünkü varsayalım $\sqrt{x} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$ alınsa, bu eşitliğin karesi alındığında $x = m + n + 2\sqrt{m\,n}$ ya da $x - m - n = 2\sqrt{m\,n}$ olur. Rasyonel olan bir nicelik, irrasyonel olan bir niceliğe eşit olmuş olur.

(88) Birisi irrasyonel terimin karesi ve diğeri rasyonel olan herhangi bir iki terimlinin karekökü, bazen bir iki terimlinin diğeriyle ifade olunabilir ki, terimlerinden biri ya da ikisi de irrasyonelin karesi olur.

Çünkü , $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y}\,)^2 = x + y \pm 2\,\sqrt{x\,y}$ olduğundan eğer iki terimli olarak farz olunan herhangi bir irrasyonel nicelik $x + y \pm 2\sqrt{x\,y}$ şekline getirilebilir ise bu irrasyonelin karekökü $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ olur. Bu durumu anlamak için irrasyoneli kapsayan terimi alıp ve çarpanına ayırarak $2\,\sqrt{x} \times \sqrt{y}$ olup zikredilen terimin bu şekilde çarpanına ayrılmış hali birkaç yol ile mümkün ise de çarpanlardan öyle iki çarpan alınmalıdır ki onların toplamları iki terimli olan zikredilen irrasyonelin rasyonel olan terimine eşit olsun. Bu şekilde yukarıda belirtilen irrasyonelin kökü, eğer iki terimli olan bu irrasyonelin işareti pozitif ise pozitif ve negatif ise negatif olur.

Örnek 1;

$3 + 2\sqrt{2}$ iki terimlisinin karekökü istenilendir. Bu bölümde $2\sqrt{2} \times \sqrt{1}$ olup aynı şekilde 2 +1 =3 olduğundan bu sonuçtan kökü istenilendir. $1 + \sqrt{2}$ olmuş olur.

Örnek 2;

$7 - 2\sqrt{10}$ iki terimlisinin karekökü istenilendir. Bu surette $2\sqrt{10} = 2\sqrt{5} \times \sqrt{2}$ olup aynı şekilde 7 = 5 + 2 olduğundan kökü istenilen $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ olmuş olur.

Örnek 3;

İş bu $2x + 2\sqrt{x^2 - 1}$ iki terimlisinin karekökü istenilendir.

$2\sqrt{x^2 - 1} = 2\sqrt{x+1} \times \sqrt{x-1}$

Aynı şekilde $x + 1 + x - 1 = 2x$ olduğundan karekökü istenilendir.

$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ olur.

Örnek 4;

İş bu $7 + \sqrt{13}$ iki terimlisinin karekökü istenilendir.

$\sqrt{13} = 2\sqrt{13/4} = 2\sqrt{13/4} \times \sqrt{1/2}$

Aynı şekilde, 13/2 + 1/2 = 7 olup karekökü istenilendir. $(\sqrt{13} + 1)/\sqrt{2}$ olmuş olur.

İrrasyonel niceliklerin kareköklerinin çıkarılması için genel olarak bir kapsamlı kural yeri gelince açıklanacaktır. İnşallah tealâ.

2.2.17. Karmaşık Nicelikler

(89) $\sqrt{-b}$ şeklinde bir nicelik yazılacak olursa bu mümkün olmayan bir durumu ifade eder. Çünkü bu durum negatif olan bir niceliğin karekökü demek olur. Bunun ise karekök dışında varlığı yoktur. Nitekim herhangi bir nicelik gerek pozitif olsun gerek negatif kendi kendiyle çarpıldığında çarpım sonucu daima pozitif olur. Bu gibi işaretler, cebir hesabına dahil edilseler bile bu işaretler kendilerine özgü özel kurala muhtaçtır. Bu kuralın kullanılmasında da son derece dikkatli olmak gerekir. Çünkü zikr olunan "kemmiyat-ı muhdise" var olan bir nicelik olmayıp yalnızca bir işaretten ibaret olduğunu daima hatırda tutmak gerelidir. Eğer ara işlemde bu gibi asılsız (*mevhume*) nicelikle karşılaşılır ise özellikle dikkat edilmelidir. Örneğin $\sqrt{-b} \times \sqrt{-b}$ çarpım sonucu (madde 72) verilen kurala uymadan çarpım sonucu zikredilen -b olur. Zira $\sqrt{-b}$ niceliği bu -b niceliğinin kökü demektir. Aynı şekilde $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c}$ çarpım sonucu $\sqrt{-b \times -c}$ ya da $\sqrt{b\,c}$ olmayarak $\sqrt{b} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{c} \times \sqrt{-1}$ ya da $\sqrt{b\,c}$ $(\sqrt{-1})^2$ yanî $-\sqrt{b\,c}$ olmuş olur.

(**Sonuç)** Buradan $(x - b + \sqrt{-c}^{\,2}) \times (x - b - \sqrt{-c}^{\,2}) = x^2 - 2\,b\,x + b^2 + c^2$ sonucu elde edilir.

Diğer taraftan bu asılsız (*mevhume*) niceliğin hiçbir dayanağı olmadığından bahsedilen nicelik ile istenilenin kapsamı hiçbir şekilde kabul edilemez. Çünkü adı geçen niceliğin kullanılanları ayrı ve anlatımları uzun olup okul kitaplarında ele alınmaları uygun olmadığından burada fazla yer tutacağından yer verilmemiştir.

2.2.18. Birinci Dereceden Denklemler

(90) Eğer bir nicelik diğer bir niceliğe ya da sıfıra eşit olursa ve cebir kuralı üzere özel işaretler vasıtasıyla bu eşitlik ifade olunsa buna **denklem** denir. Şöyle ki: $x - b = c - x$ bir denklem olup $x- b$ niceliği denklemin bir tarafını $c -x$ niceliği diğer tarafını teşkil eder.

(91) Şimdi bir denklemde bulunan kesirler yükseltildikten sonra zikredilen denklemde bilinmeyenin birinci kuvveti bulunur ise o denkleme birinci dereceden denklemler ve karesi bulunur ise ikinci dereceden denklemler ve genel olarak bilinmeyenin kuvveti n olur ise n. dereceden denklem diye isimlendirilir. Bir denklemin çözümü o denklemde bulunan bilinmeyenin öyle bir değerinin bulunmasıdır ki zikredilen denklemde x yerine bu değeri konulduğunda denklemde eşitlik elde edilir.

(92) Bir denklemde bulunan niceliklerin işaretlerinin değiştirilmesiyle denklemin eşitliğine zarar gelmeksizin bu denklemin bir tarafından diğer tarafına taşınabilir.

Örneğin, $x + 10 = 15$ olsa her iki taraftan 10 çıkarıldığında $x + 10 - 10 = 15 - 10$ (Açıklama 2) ya da $x = 15-10$ olur.

Yine $x - 4 = 6$ olsa her iki tarafı 4 ile topladığımızda (Açıklama 1) $x - 4 + 4 = 6 + 4$ ya da $x = 6 + 4$ olur. Eğer $x - b + c = y$ olsa her iki taraf $b-c$ ile toplandığında $x - b + c + b - c = y + b - c$ ya da $x = y + b - c$ olur.

(Sonuç) Buradan bir denklemin her iki tarafında bulunan terimin bütün işaretleri değiştirilse her iki tarafın yine birbirine eşit olduğu görülür.

Örneğin, $x - b = c - 2x$ olsa her iki tarafı nakil olunduğunda $-c + 2x = -x + b$ olup ya da $b - x = 2x - c$ olur.

(93) Eğer denklemin her iki tarafında bulunan her bir terim herhangi bir nicelik ile çarpılsa çarpım sonuçları birbirine eşit olur. (Açıklama 3)

(Sonuç) Bir denklem kesirden kurtarılmak istenirse her bir terim sırasıyla bu kesirlerin paydalarıyla çarpılır.

Örneğin, $3x + 5x/4 = 34$ olsa her bir terim 4 paydası ile çarpıldığında $12x + 5x = 136$ olup kesirden kurtulmuş olur. Buna göre bir denklemi kesirden kurtarmak için denklemin her iki tarafını bu kesirlerin paydalarının çarpılması ile elde edilen sonuç ile çarpılır.

Meselâ, $x/2 + x/3 + x/4 = 13$ olsa her bir terim $2 \times 3 \times 4$ ile çarpıldığında;
$(3 \times 4 \times x) + (2 \times 4 \times x) + (2 \times 3 \times x) = 2 \times 3 \times 4 \times 13$ olup
ya da $12x + 8x + 6x = 312$ yani $26x = 312$ olur.

Şimdi bir denklem, kökten kurtarmak istenirse bu niceliği kapsayan terimler denklemin bir tarafında bırakılıp, kalan nicelik diğer tarafa taşınarak kökün her iki tarafı kök üssü kuvvetine yükseltilir.

Şöyle ki, $\sqrt{b+x} - c = d$ olsa taşındığında $\sqrt{b+x} = c + d$ olur. Ve $b+x = (c+d)^2$ olur. Eğer denklemde + veya - işaretiyle birleşmiş iki zikredilen nicelik bulunur ise bu yapılan işlem, ikinci kök için tekrar edilir.

Şöyle ki, $\sqrt{b+x} + \sqrt{x} = c$ olsa nakil ile $\sqrt{b+x} = c - \sqrt{x}$ olup karesi ile $b + x = c^2 - 2c\sqrt{x} + x$ olduğundan tekrar taşındığında $2c\sqrt{x} = c^2 - b$ olarak karesi ile $4c^2x = (c^2 - b)^2$ olup kökten kurtulmuş olur.

(95) Eğer denklemin her iki tarafı yalnız bir nicelik üzerine bölündüğünde bölümler birbirine eşit olur.

Mesela: $17x = 136$ olsa $x = 136/17 = 8$ olur. (Açıklama 4)

(96) Eğer bir denklemin her iki tarafı tek kuvvete yükseltilse ortaya çıkan üsler birbirine eşit olur. Örneğin, $x^{1/2}=9$ olsa $x=9 \times 9 = 81$ olur (Açıklama 3)

Eğer bir denklemin her iki tarafı birinci dereceden kuvvete yükseltilse ortaya çıkan üsler birbirine eşit olur.

Aynı şekilde, eğer her iki tarafın bir kuvvetten kökü alınsa bunlar birbirine eşit olur. Örneğin, $x=81$ olsa $x^{1/2}=9$ olur. (Madde 58)

(97) Birinci dereceden denklemlerin yalnız bir şekilde çözümü olur. Bu da bilinmeyenin yalnız bir değeri vardır ki denklemin her iki tarafında bilinmeyenin yerine konulduğunda eşitlik sağlanmış olur. Zira birinci dereceden olan her bir denklem x bilinmeyenine göre $bx + c = 0$ tarzına döndürülebildiğinden mümkün olduğu zikredilen bilinmeyeni d ve e olarak iki değeri varsayılsa ve yerine koyularak eşitlik sağlandığı varsayılsa;

$bd + c = 0$ olup ya da $be + c = 0$ olarak

$\therefore bd - be = 0$ ya da $b(d - e) = 0$ olur.

Ancak b niceliği sıfıra eşit olamaz. Eğer sıfıra eşit olsa yukarıda zikredilen şeklin denklem olmaması lazım gelir. Bu durumda $d - e = 0$ ya da $d = e$ olup d ve e niceliklerinin çeşitli değerleri olamaz ya da x bilinmeyeninin yalnız bir değeri vardır ki denklemin her iki tarafında x yerine konulduğunda eşitlik hususu elde dilir.

(98) Birinci dereceden denklemlerde bilinmeyenin değeri bulunmak istenirse; ilk olarak bu denklemi kesirden ve kökten kurtarmak, sonra bilinmeyeni kapsayan terimleri denklemin bir tarafına taşımak ve istenilen niceliği de denklemin diğer tarafında bırakarak, her iki tarafı bilinmeyenin katsayısı ya da katsayıları toplamına bölündüğünde bölüm, adı geçen bilinmeyenin değeri bulunmuş olur.

Örnek 1;

$3x - 5 = 23 - x$ denkleminde x bilinmeyeninin değeri istenirse: Taşınarak $3x + x = 23 + 5$ **(madde 92)** ya da

$4x = 28$ bölünme ile $x = 28/4 = 7$ (**madde 95**)

Örnek 2;

$x + x/2 - x/3 = 4x - 17$ denkleminde x bilinmeyeni istenirse:

2 sayısı ile çarpıldığında $2x + x - 2x/3 = 8x - 34$

3 sayısı ile çarpıldığında $6x + 3x - 2x = 24x - 102$

taşınarak $6x + 3x - 2x - 24x = 102$

ya da $-17x = -102$

$17x = 102$ **(Sonuç madde 92)**

$\therefore x = 102/17 = 6$

Örnek 3;

İşbu $1/b + c/x = d$ denkleminde x bilinmeyeni istenendir.

$1 + bc/x = bd$

$x + bc = bdx$

$x - bdx = -bc$

$bdx - x = bc$ **(Sonuç madde 92)**

$x(bd-1) = bc$

$\therefore x = bc/(bd-1)$

Örnek 4;

$5 - x+4/11 = x - 3$ x bilinmeyeni istenendir.

$55 - x - 4 = 11x - 33$

$55 - 4 + 33 = 11x + x$

$84 = 12x$

$\therefore x = 84/12 = 7$

Örnek 5;

$x+(3x-5/2)=12-(2x-4/3)$ x bilinmeyeni istenendir.

$2x+3x-5=24-(4x-8/3)$

$6x+9x-15=72-4x+8$

$6x+9x+4x=72+8+15$

$19x=95$

$\therefore\ x=95/19=5$

Örnek 6;

$\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x}=2\sqrt{x}$ x bilinmeyeni istenendir.

$\sqrt{b+x}=2\sqrt{x}-\sqrt{b-x}$

$b+x=4x-4\sqrt{bx-x^2}+b-x$

$4\sqrt{bx-x^2}=2x$

$2\sqrt{bx-x^2}=x$

$4bx-4x^2=x^2$

$4bx=5x^2$

$4b=5x$

$\therefore\ x=4b/5$

Örnek 7;

$\sqrt[m]{b+x}=\sqrt[2m]{x^2+5bx+c^2}$ x bilinmeyeni istenendir.

her iki tarafı $2m$ kuvvetine yülseltilerek;

$(b+x)^2=x^2+5bx+c^2$ ya da

$b^2+2bx+x^2=x^2+5bx+c^2$

$3bx=b^2-c^2$

$\therefore x=b^2-c^2/3b$

(99) Şimdi riayet edilen kurallardan bir genel kural olup denklem halinde çok kullanılmış olmakla bu mahalde zikri uygun görülmüştür.

Şöyle ki, herhangi *b c d e* nicelikleri aralarında $b/c = d/e$ olsa

$b+c / b-c = d+e / d-e$ olup ve $b-c / b+c = d-e / d+e$ olur.

Zira bu maddeyi ispat için, $b/c = d/e$ ise $(b/c) + 1 = (d/e) +1$

Ya da $(b+c)/c = (d+e)/e$

Yani $(b/c) -1 = (d/e) -1$

Ya da $(b-c)/c = (d-e)/e$ ise

$(b+c)/c \div (b-c)/c = (d+e)/e \div (d-e)/e$

Ya da $b+c/b-c = d+e/d-e$

Sonuç bunun gibi ispat olunabilir ki $b-c / b+c = d-e / d+e$ 'de olur.

Netice iş bu kuralın bir tarafı gerçek sayı olan denkleme tatbiklerinde zikredilen gerçek sayı paydası bir olarak bir kesir gibi itibar olunur. Ve zikredilen kural sözle yani eğer iki kesir birbirine eşit olsalar birinin payıyla paydası toplamının aralarında olan farka bölümü diğer payıyla paydası toplamının aralarında olan farka bölümüne eşittir. Talebeler arasında bunu ezberlemeleri lâzımdır.

Örnek 1;

$x+2 / x-2 = 7/5$ denkleminde *x* bilinmeyeninin değeri istenendir.

Zikredilen kurala tatbiken $2x/4 = 12/2$

Ya da $x/2 = 6$ ise $x=12$

Örnek 2;

$\sqrt{b} + \sqrt{b-x} \;/\; \sqrt{b} - \sqrt{b-x} = 1 / b$ *x* bilinmeyeni istenendir.

Zira zikredilen kurala tatbiken; $2\sqrt{b} \;/\; 2\sqrt{b-x} = 1+ b /1- b$

Ya da $\sqrt{b/b-x} = 1+ b /1- b$

İş bu eşit niceliklerin karesi alındığında $b / b-x = (1+b / 1-b)^2$

Ya da $(b-x / b) = (1-b / 1+b)^2$

Ve ya da $1- x/b = (1-b / 1+b)^2$

$x /b = 1- (1-2b+b^2 / 1+2b+b^2)$

$4b^2 / (1+b)^2$ ise

$x = (2b / 1+b)^2$

Örnek 3;

$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} \;/\; \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = 1/2$ *x* bilinmeyeni istenendir.

Kural ile $\sqrt[3]{x+1}$ / $\sqrt[3]{x-1}$ = 3/1

Eşit niceliklerin küpü alındığında x+1 / x-1 = 27

Ve yani kural ile; x = 28 / 26 = 1 $\frac{1}{13}$

(Uyarı!) Her iki tarafında bilinmeyen bulunan denkleme yukarıda zikri önceden geçen kuralın genel olarak tatbiki caiz değildir. Çünkü bu yol ile denklemin bir tarafı sadeleştirilmekle diğer tarafı çoğunlukla anlaşılmaz kalıp hiçbir kural elde edilmez.

2.2.19. Bilinmeyeni İçeren Denklemler

(100) Eğer tek başına var olan iki denklemde iki bilinmeyen bulunsa zikredilen iki denklemin altda beyan olunacak üç yolu ile bilinmeyen biri yalnız bir denkleme dönüştürülür. İlk yolu iki denklemin birinde bilinmeyenlerden birinin değeri ikinci bilinmeyen ve bilinen sayı aracılığıyla elde edilip diğer denklemde yerine konularak ikinci denklemde bir bilinmeyen bulunup değeri önce tesis olunan kural yardımıyla çıkarılmış olur.

Örnek 1;

$x + y = 10$

$2x - 3y = 5$ x ile y bilinmeyenlerinin çıkarılması istenendir.

Birinci denklemden $x = 10 - y$ olup her iki tarafı 2 ile çarpıldığında $2x = 20 - 2y$ olduğundan ikinci denklemde iş bu $2x$ niceliğinin eşiti yerine konularak

$20 - 2y - 3y = 5$

$20-5 = 2y + 3y$

$15 = 5y$ ise

$y= 15/5 =3$

Ve aynı şekilde $x = 10 - y = 10 - 3 = 7$

İkinci yolu iki denklemde bilinmeyenden birinin değerleri tayin olunup iş bu değerler birbirine eşit kılınarak yeni olan denklemden ikinci bilinmeyenin değeri çıkarılır.

Örnek 2;

$x + y = b$

$cx + dy = ev$ x ile y bilinmeyenlerinin çıkarılması istenendir.

Birinci denklemden $x = b\text{-}y$ ve ikinci denklemden

$cx = ev\text{-}dy$

$x = (ev\text{-}dy) / c$ ise

$b\text{-}y = (ev\text{-}dy)/ c$

$cb - cy = ev - dy$

$dy\text{-}cy = ev - cb$

$y (d - c) = ev - cb$ ise

$y = (ev - cb) / d - c$

Ve aynı şekilde $x = b\text{-}y = b - (ev\text{-}cb) / d\text{-}c$

$= db - bc\text{-} ev+bc / d -c$

$= db - ev / d -c$

Üçüncü yolu, eğer iki denklemde bilinmeyenlerden birinin katsayıları aynı olup ve işaretleride benzer ise iki denklemin birbirinden çıkarılması ve işaretleri benzer değil ise birbirleriyle toplanarak zikredilen bilinmeyen yok edilir.

Örnek;

$x + y = 15$

$x - y = 7$ x ile y bilinmeyenlerinin çıkarılması istenilendir.

Toplamı $2x = 22$ ve x=11

Çıkarılması $2y = 8$ ve y=4

Eğer yok edilmesi istenen bilinmeyenin katsayıları farklı ise ilk denklemin her bir terimi ikinci denklemde bulunan katsayıyla çarpılıp ve ikinci denklemin her bir terimi de ilk denklemde bulunan bilinmeyenin katsayısıyla çarpılarak elde edilen iki denklem evvelki gibi birbiriyle toplama ya da çıkarma yapılır.

Örnek;

$3x - 5y = 13$

$2x + 7y = 81$

İlk denklemin her bir terimi 2 ile çarpılıp ve ikinci denklemin her bir terimi 3 ile çarpıldığında ;

$6x - 10y = 26$

$6x + 21y = 243$

Birbirinden çıkarılması ile $31y= 217$ ise

$y = 217/31 = 7$

Ve aynı şekilde $3x - 5y = 13$

$3x - 35 = 13$

$3x = 13 + 35 = 48$ ise

$x = 48 / 3 =16$

Örnek 2:

$bx + cy = d$

$mx - ny = e$ x ile y bilinmeyenleri istenendir.

Birinciden; $mbx + mcy = md$

İkinciden; $mbx - bny = be$

Çıkarılmasıyla; $y (mc + bn)= md - be$ ise

$y = (md - be) / (mc + bn)$

Ve yine $nbx + cny = nd$

$mcx - cny = ce$

Toplanmasıyla; $x (nb + mc) = nd + ce$ ise

$x =(nd + ce) / (nb + mc)$

Örnek 3:

$(3x - 5y)/ 2 + 3 = (2x + y)/5$

$8 - (x -2y)/ 4 = x/2 + y/3$ x ile y bilinmeyeni istenendir.

Birinciden, $3x-5y+6 = (4x + 2y) /5$

$15x-25y+30 = 4x + 2y$

$15x-4x-25y-2y = -30$

$11x-27y = -30$

İkinciden, $32 - x + 2y = 4x/2 + 4y/3 = 2x + 4y/3$

$96 - 3x + 6y = 6x + 4y$

$96 = 6x + 3x + 4y - 6y$

$9x - 2y = 96$

$11x - 27y = -30$

$99x - 22y = 1056$

$99x - 243y = -270$

Çıkardığımızda; $221y = 1326$ ise

$y = 1326 / 221 = 6$

Ve aynı şekilde $9x - 2y = 96$

$9x - 12 = 96$

$9x = 96 + 12 = 108$ ise

$x = 108 / 9 = 12$

(101) Eğer üç bilinmeyenden oluşan birbirine denk olmayan üç adet denklem bulunsa, zikredilen üç denklemden herhangi ikisi önce zikr olunan kural gereğince yalnız iki bilinmeyenli denkleme dönüştürülüp sonra üçüncü denklem ile ilk denklemlerden biri zikredilen bilinmeyeni kapsayan diğer bir denkleme çevrilerek bu şekilde meydana gelen iki denklemden kalan bilinmeyeni çıkarıp üçüncü bilinmeyeni de zikredilen üç denklemin birinden elde edilir.

Örnek;

$2x + 3y + 4z = 16$

$3x + 2y - 5z = 8$

$5x - 6y + 3z = 6$

Önceki iki denklemden $6x + 9y + 12z = 48$

$6x + 4y - 10z = 16$

Çıkardığımızda; $5y + 22s = 32$

Birinci ile üçüncüden; $10x + 15y + 20s = 80$

$10x - 12y + 6s = 12$

Çıkarılması ile; $27y + 14z = 68$

$5y + 22z = 32$

Bu takdirce; $135y + 70z = 340$

$135y + 594z = 864$

Çıkarılması ile; $524z = 524$ ise

$z = 1$

Ve aynı şekilde $5y + 22z = 32$

$5y + 22 = 32$

$5y = 32 - 22 = 10$ ise

$y = 10/5 = 2$

Ve yine $2x + 3y + 4z = 16$

Yani $2x + 6 + 4 = 16$

$2x = 16 - 6 - 4$

$2x = 6$ ise

$x = 3$

İş bu kural denklemin sayısınca bilinmeyeni olan art arda gelen çok sayıda denkleme uygulanabilir.

(102) Bilinmeyen terimlerin değeri tamamen takdir için zikredilen bilinmeyenin sayısınca ard arda gelmeyen denklem lazım gelip bilinmeyenin sayısı denklemin sayısından az olduğu takdirde iş bu bilinmeyenden biri farklı denklemlerden elde edildiğinde eğer bilinmeyenin bu şekilde çıkarılmasının değerleri farklı olur ise zikredilen denklemler birinci dereceden denklem olmuş olurlar. Ve eğer adı geçen değerler birbirinin aynı olurlar ise zikr olunan denklemlerden bazıları lüzumsuz olmuş olur. Kaldı ki, denklemin sayısı bilinmeyenin sayısından az olsa zikredilen bilinmeyenlerden birinin eşitliğinde kalan bilinmeyenin değerleri rastgele farz olunur. Ve bu yeni eşitliğin hali çok sayıda tarzda mümkün olur.

Şöyle ki; $x+y=b$ denkleminde $x = b - y$ olduğundan iş bu bilinmeyene rastgele bir değer verilerek x bilinmeyeninin de bir değeri elde edilir ki $x+y=b$ olur.

Yukarıda zikri önceden geçen denklemler birbirine denk olmamalıdır yani birbirlerinden çıkarılmış olmamalıdır.

Varsayalım farklı olmayıp doğruluğuda $x + y = b$ denkleminin doğruluğundan meydana gelir. Bazen denklemin bu yönüyle denk ya da denk olmamalarını önceden anlamak kolay değildir. Şöyle ki iş bu,

$x + 3y + 4z = 9$

$3x - 2y + 17z = 25$

$x + 14y - z = 11$

Denklemlerinden üçüncü denklemin ilk denklemlerden çıkarıldığı tek bakışta malum değildir. Lâkin. ilk denklemi 4 sayısı ile çarpıp ikinci denklemden çıkarıldığında üçüncü denklem elde edilir. Bu takdirce zikredilen üç denklemden x y z bilinmeyenlerinin takdir ve tayini için biraz önce zikr olunan kural iş bu denkleme uygulandığında zikredilen kuralın bu bölümde geçerli olmayacağı görülmüş olur.

2.2.20. Birinci Dereceden Denklemleri Ortaya Çıkaran Problemler

(103) Bilinen bazı nicelikler ile ilişkisi olan diğer bilinmeyen niceliklerin incelenmesi ve bir cebir işlemi olarak kurgulan bir problemin çözümü istenir ise yukarıda belirtilen ilk kural[*] gereği gibi anlatılmış idi. Burada bilinmeyenin değerinin yerine x , y , z harflerinden biri konulduktan sonra meydana gelen denklemin bilinmeyenlerine bilinen gibi bakılarak, adı geçen denklemin içerdiği şartların doğru ve doğru olmamasını sınama işlemi yapılır. Bulunmayan diğer bilinmeyenleri bu şekilde denklemden ortaya çıkarıp sonra karmaşık denklemler bu şekilde çözülerek miktarı ve açıklaması bulunmuş olur.

Problem 1-

b, *c*, *d* tabyalarında bulunan askerlerden *b* tabyasında bulunan askerlerin sayısı *c* tabyasında bulunan askerlerin sayısının iki katı ve *d* tabyasında bulunan askerlerin sayısı b ile c tabyalarında bulunan askerlerin sayıları toplamına eşit olduğu bilinmektedir. Bu üç tabyaya paylaştırılacak buğday 300 kilodur. Her bir tabyanın hissesine ne kadar kilo buğday düştüğünü bulunuz.

---

[*] bkz.100. Madde *Bilinmeyenleri içeren denklemler konusundaki birinci yol*.

Varsayalım x harfi c tabyasına düşen buğdayın kilosunu gösterirse $2x = b$ tabyasının hissesini gösterir. $x + 2x$ yani $3x = d$ tabyasının hissesi olmuş olur. Üç tabyaya paylaştırılacak buğday 300 kilo olduğu göz önüne alınırsa;

$x + 2x + 3x = 300$ $6x = 300$ ise;

$x = 300/6 = 50$ kilo c tabyasının hissesi

$2x = 100$ kilo b tabyasının hissesi

$3x = 150$ kilo d tabyasının hissesi.

Problem 2;

15 parmak uzunluğunda olan bir doğru çizgiyi, biri diğerinin dörtte üçü olacak şekilde iki kısma bölünuz.

Varsayalım $4x$ = kısmlardan birinin uzunluk miktarı (parmak) olsun;

$3x$= diğerinin olsa;

$7x = 15$ olacağından

$x = 15/7$ olur.

Bu durumda $4x = 60/7 = 8\frac{4}{7}$ bir kısmı,

$3x = 45/7 = 6\frac{3}{7}$ diğer kısmı.

Problem 3;

Bir kale hendeğini, b harfiyle gösterilen bir kimse 8 günde, c harfiyle gösterilen bir kimse 10 günde kazıyor. Her ikisi birlikte kazacak olursa bu hendeği kaç günde tamamlarlar.

Varsayalım x günlerin sayısını, q harfi hendeği, b varsayılan günde kazılan hendağin 1/8 kadar yani $k/8$ kısmını kazmış olsun. Bu sdurumda x günde birinci şahıs $xq/8$ miktar kazıp ve c kişisi de $xq/10$ miktar kazmış olur.

Bu durumda $xq/8 + xq/10 = q$

$$x/8 + x/10 = 1$$

$$10x + 8x = 80$$

$$18x = 80$$

İse $x = 80/18 = = 4\,\frac{8}{18} = 4\,\frac{4}{9}$ miktar gün olmuş olur.

Problem 4;

Kilosu 12 kuruşa 50 kilo buğday ve kilosu 9 kuruştan darıdan yapılacak çorbanın her kilosu 10 kuruşa mal olması için ne miktar karıştırmak lâzımdır.

x istenen darının kilo fiyatı olsun;

$9x$= darının değeri olan kuruş fiyatıdır.

600= buğdayın değeri

$(50+x)10$ = çorbanın değeri ise

$9x + 600 = 500 + 10x$

$100=x$ istenilen darının kilo fiyatı olmuş olur.

Problem 5;

Bir ordu komutanı yanında var olan bir miktar kuruşu, askerlerine bahşiş olarak vermek isterse; eğer yanında bulunan asker sayısı üç kişi fazla olsa her bir askere bir kuruş eksik eğer iki asker az olsa, her bir asker bir kuruş fazla alacağına göre askerlerin sayısı ve her birinin alacağu kuruş miktarı ne kadardır.

x askerin sayısı

y her bir askerin aldığı kuruş miktarı

xy askerlerin aralarında bölünmüş olan para olur.

$(x+3) \times (y-1) = xy$

$(x-2) \times (y+1)= xy$ olduğuna göre;

$xy - x + 3y - 3 = xy$ ya da $-x + 3y = 3$

$xy + x - 2y - 2 = xy$ ya da $x - 2y = 2$ ise

$y = 5$ olur. Bu da her bir askerin aldığı kuruş olur.

$x - 2y = x - 10 = 2$ olur.

$x = 12$ askerin sayısını verir.

2.2.21. İkinci Dereceden Denklemler

(104) Bir denklemin bilinmeyen terimleri, yalnız ikinci dereceyi içerse bu bilinmeyenin karesinin değeri, aşağıda verilen kural ile elde edilip sonra her iki tarafın karekökleri alındığında adı geçen bilinmeyenler elde edilmiş olur.

Örnek 1;

$5x^2-45=0$ x bilinmeyenini bulmak için taşıma ile

$5x^2=45$

$x^2=9$

$\therefore \; x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ (madde 96)

Bulunan bilinmeyenin değerinin önüne + ve - işaretlerinin ikisi de konulmuştur. Çünkü bir sayının karekökü ya pozitif veya negatif olur. (Madde 61) Kaldı ki x bilinmeyeninin işareti de negatif olur ise bu bilinmeyen önceki gibi ya +3 veya -3 miktarına eşit olur.

Örnek 2;

$b x^2 = c d e$

$x^2 = c d e / b$

$\therefore \; x = \pm\sqrt{c d e / b}$

(105) Eğer tek bir denklemde bilinmeyenin birinci ve ikinci kuvvetleri bulunursa bu denklemin terimleri, bilinmeyenin kuvvetlerine uygun olarak sıralanır. Diğer bir ifadeyle bilinmeyenin kuvveti, en büyük olan ilk terim bırakılıp sonra bilinen sayı da denklemin diğer tarafına nakl olunduğunda eğer üssü iki olan bilinmeyenin katsayısı varsa adı geçen denklemin terimlerinin toplamı, bu katsayıya bölünür.

Eğer işareti negatif ise denklemin her bir teriminin işareti dönüştürülerek (Sonuç Madde 92) adı geçen denklem $x^2 \pm vx = \pm l$ tarzına dönüştürülür. Sonra denklemin her iki tarafına üssü bir olan bilinmeyenin katsayısının yarısının karesi eklenerek denklemin bir tarafı tam kare kılınıp diğer tarafı da yalnız sayıdan ibaret olur. Sonra her iki tarafın karekökleri alınarak oluşan birinci derece denklemden bu bilinmeyenin değeri bulunmuş olur.

Örnek 1:

Farz edelim $x^2 + v\,x = l$ denkleminde $x^2 + v\,x + \frac{v^2}{4}$ üç terimlisi $x + \frac{v^2}{2}$ iki terimlisinin karesi olduğundan (madde 66) bu şekilde denklemin her iki tarafına $\frac{v^2}{4}$ eklendiğinde $x^2 + v\,x + \frac{v^2}{4} = l + \frac{v^2}{4}$ denklemi ortaya çıkıp, her iki tarafın kökü alındığında $x + \frac{v}{2} = \pm\ \sqrt{l} + \frac{v^2}{4}$ nakl ile $x = -\frac{v}{2}\ \pm\ \sqrt{l} + \frac{v^2}{4}$ ve eğer $x^2 - v\,x = l$ olsa yine yukarıda ayrıntılarıyla açıklandığı üzere çözülerek $x = \frac{v}{2} \pm \sqrt{l} + \frac{v^2}{4}$ olur.

Örnek 2:

$x^2 - 12\,x + 35 = 0$ x bilinmeyeni istense;

nakil ile $x^2 - 12\,x = -35$

6 sayısının karesi denklemin her iki tarafına eklendiğinde

$x^2 - 12\,x + 36 = -35 + 36 = 1$ her iki tarafın karekökleri alındığında

$x - 6 = \pm 1$

$\therefore x = 6 \pm 1$ =7 ya da =5 olup bilinmeyenin bu değerinden herhangi biri denklemde x yerine konulsa denklemin şartı yerine gelir. Yani denklemin sol tarafı 0'a eşit olur.

(106) Eğer ikinci dereceden bir denklem $b\,x^2 \pm c\,x = \pm\,d$ tarzında ise bu denklemin sol tarafı başka bir yolla aşağıdaki gibi tam kare kılınabilir. Eğer denklemin her bir terimi 4b ile çarpılırsa;

$4\,b^2\,x^2 \pm 4\,b\,c\,x = \pm\,4\,b\,c\,d$ her iki tarafa c^2 eklendiğinde

$4\,b^2 x^2 \pm 4\,b\,c\,x + c^2 = \pm 4\,b\,c\,d + c^2$

her iki tarafın karekökleri alındığında;

$2\,b\,x \pm \mathrm{c} = \pm\sqrt{c^2 \pm 4\,b\,c\,d}$

$\therefore\ \ x = \pm\frac{\sqrt{\mathrm{c}^2 \pm 4\,b\,c\,d}}{2\,b}$

Örnek 3:

$\frac{6}{x+1} + \frac{2}{x} = 3$ x bilinmeyeni istense;

$6 + \frac{2\,x\ +2}{x} = 3\,x + 3$

$6\,x + 2\,x + 2 = 3\,x^2 + 3\,x$

$3\,x^2 - 5\,x = 2$

$4\ \times\ 3$ yani 12 ile her iki tarafı çarptığında;

$36\,x^2 - 60\,x = 24$

$(5)^2$ yani 25 her iki tarafa eklendiğinde $36x^2\text{-}60x\text{+}25 = 24\text{+}25 = 49$

Öyle ise $6x = 5 \pm 7 = 12$ ya da -2 ise

x=2 ya da – 1 / 3

Örnek 4:

$b\,d\,x^2 - c\,d\,x + b\,e\,x = c\,e$ x bilinmeyeni istense;

$b\,d\,x^2 - (\,c\,d - b\,e\,)\,x = c\,e$ tarafeyn $4\,b\,d$ ile çarpılarak

$4\,b^2 d^2 x^2 - 4\,b\,d\,(\,c\,d - b\,e\,)\,x = 4\,b\,d\,c\,e$

Her iki tarafa $(\,c\,d - b\,e\,)^2$ eklenmesi ile

$4\,b^2 d^2 x^2 - 4\,b\,d\,(\,c\,d - b\,e\,)\,x + (\,c\,d - b\,e\,)^2 = 4\,b\,d\,c\,e + (\,c\,d - b\,e\,)^2$

Her iki tarafın kökü alınması ile;

$2\,b\,d\,x - (\,c\,d - b\,e\,) = \pm\,(\,c\,d + b\,e\,)$

$2\,b\,d\,x = (\,c\,d - b\,e\,) \pm (\,c\,d + b\,e\,)$

$= 2\,c\,d$ ya da $-\,2\,b\,e$

$\therefore\ \ x = c\ /\ b$ yahud $-\,e\,/\,d$ olur.

Örnek 5:

$x + \sqrt{5\,x + 10} = 8$

nakil ile $\sqrt{5\,x + 10} = 8 - x$

karesinin alınması ile $5\,x + 10 = 64 - 16\,x + x^2$

$x^2 - 21\,x = 54$

tam kare yapılarak $x^2 - 21\,x + 441/4 = 441/4 - 54 = 225/4$

kökü alınarak $x - 21/2 = \pm\ 15/2$

$\therefore\ \ x = 18$ ya da 3

Bu şekilde x bilinmeyeninin iki değeri bulunmuş ise de 18 sayısının, denklemin şartına uymadığı tecrübe ile görülmüştür. Bunun sebebi ise $5x+10$ iki terimlisi $+\sqrt{5\,x + 10}$ niceliğinin karesi olduğu gibi $-\sqrt{5\,x + 10}$ niceliğinin de karesi olur. $\sqrt{5\,x + 10} = 8 - x$ denkleminde her iki tarafın kareleri alınarak denkleme yeni bir şart eklenip bilinmeyenin de zikredilen şartı sağlayan özel bir değeri elde edilir. Nitekim 18 sayısı x bilinmeyeninin öyle bir değeridir ki $x - \sqrt{5\,x + 10} = 8$ denkleminin şartına uyar. $+x$ x $+y$ çarpımı $-x$ x $-y$ çarpımına eşit olmak kuralına uygun olarak niceliklerin çarpımı ve üslerinde bilinmeyenin yeni değeri denkleme eklenir. Eğer denklemin doğası gereği terk olunmaz ise yeni değer diğer adı geçen denklemde görülür.

(107) İkinci dereceden bir denklemde bilinmeyenin yalnız iki farklı değeri bulunur ki zikredilen denklemde x yerine konulduğunda eşitlik elde edilir. Çünkü iş bu $b\,x^2 + c\,x + d = 0$ denkleminde x bilinmeyeninin $m\ n\ e$ gibi üç farklı değeri varsayılsa bu durumda;

$b\,m^2 + c\,m + d =$ ………..……. (1)

$b\,n^2 + c\,n + d =$ ………………. (2)

$b\,e^2 + c\,e + d =$ ……………….. (3)

2 rakamıyla işaret olunan denklem 1 rakamıyla işaret olunan denklemden çıkarıldığında ;

$b\,(m^2 - n^2) + c\,(m - n) = 0$

$\therefore\ \ b\,(m + n) + c$ …………………. (bir)

ve yine $b\,(m^2 + n^2) + c\,(m - e) = 0$

$\therefore\ \ b\,(m + e) + c$ …………………. (iki)

İkinci denklem birinci denklemden çıkarıldığında;

$b\ (n\text{-}e) = 0$ olur.

Ancak b değeri 0 ‘a eşit olamaz. Eğer eşit olursa ikinci dereceden denklemin olmaması gerekir. Bu sonuçtan $n\text{-}e= 0$ ya da $n=e$ olup ikinci dereceden bir denklemde x bilinmeyeninin 3 farklı değeri olamayıp yalnız iki farklı değeri olduğu görülür.

(108) İkinci dereceden $x^2 + q\,x + l = 0$ şeklinde olan bir denklemde $-q=x$ bilinmeyeninin iki değeri toplamı $l=x$ bilinmeyeninin iki değerinin çarpım sonucu varsayalım m ve n harfleri x bilinmeyeninin iki değerini gösterse;

$m^2 + q\,m + l = 0$ ve

$n^2 + q\,n + l = 0$ olduğundan

$\therefore\ \ m^2 - n^2 + q\,(m - n) = 0$

$\therefore\ \ m + n + q = 0$

Ya da $-q = m + n$

ve yine $l = -q\,m - m^2$

$= (m + n)\,m - m^2$

$= m\,n$

(Sonuç) Eğer denklem $b\,x^2 + c\,x + d = 0$ şeklinde bulunursa;

$x^2 + (c / b)\,x + d / b = 0$ olduğundan biraz önce ispat olunduğu üzere

$-c / b = x$ bilinmeyenin iki değeri toplamı ve

$d / b = x$ bilinmeyenin iki değerinin çarpım sonucu olmuş olur.

(109) Bir denklemde x bilinmeyeninin değerleriyle bu denklemin terimlerinin katsayılarının aralarında bir önceki maddede ispat olunan ilişki, birçok yolla kullanılmıştır. Birincisi bir denklemin doğru veya doğru olmaması sınanmasında kullanılır. İkincisi bu denklemde bilinmeyen değerler arasında bazı ilişkiler bilinerek zikredilen bilinmeyenin değerlerinin bulunması için kullanılır. Üçüncü olarak ikinci derece tarzına döndürülüp yalnız bilinmeyenin değerleri toplamını ya da çarpımlarını kesinleştirmek için farklı denklemler halinde kullanılır. Nitekim kullanım şekilleri aşağıda gösterilecek örneklerden anlaşılır.

Örnek 1:

$3x^2 - 5x = 2$ denkleminde x bilinmeyeninin değerleri (Madde 106 örnek 3) 2 ve -1/3 olup, bu sayının x bilinmeyeninin doğru değeri olduğunu sınayarak, $x^2 - 5x/3 - 2/3 = 0$ şeklinde yerine konulur.

Çünkü $2 + (-1/3) = 5/3$ ve $2 \times (-1/3) = -2/3$ olduğundan x bilinmeyeninin istenen değerleri 2 ve -1/3 olduğu açıkça görülür.

Örnek 2:

$x^2 - 21x+54 =0$ denkleminde x bilinmeyeninin değerlerinden biri diğerinin altı katı olduğu bilinmektedir. Bu iki değerden her biri istenendir. Rakamların değerlerinden biri b varsayılırsa diğeri $6b$ olduğundan, toplamları $7b=21$ ise $b=3$ olup istenen değerlerden biri 3 ve diğeri 18 olmuş olur.

(110) Herhangi bir denklem $(x + b)\, z = 0$ şeklinde olup z harfi x bilinmeyenini içerse herhangi cebir kuralıyla gösterilse $x+b=0$ ve $z=0$ yani $x= -b$ bu denklemin bir çözümü olup $z=0$ denkleminden de ikinci çözümü görülür. Bu durumda bir denklem bölünerek ya da bir çarpanı yok edilerek sadeleştirildiğinde eğer bölen ya da yok edilen çarpan bilinmeyen değeri içeriyorsa bu bölen ya da yok edilen çarpan 0'a eşit kılınarak denklemin hiç olmazsa bir çözümü olsun bulunmuş olur. Şöyle ki, $x^2+3x=7x$ denklemi x ile bölünebildiğinden bu sonuçtan $x=0$ varsayılan denklemin bir çözümü olmuş olur.

Aynı şekilde $x^2-5x+6=0$ varsayılsa bu denklem $(x-2)\,(x-3) = 0$ tarzında yazılabildiğinden;

$x -2 = 0$ ya da $x=2$

$x-3 = 0$ ya da $x=3$ x bilinmeyeninin değerleri işte bu kural vasıtasıyla ikinci derece denklemle çözülüp yukarıda açıklalanan genel kurallar bazen hesaba katılmaz.

Örnek verilen $(x - d)\sqrt{b\,c} - (b - c)\sqrt{d\,x} = 0$ denklemden x isetenendir.

$x\sqrt{b\,c} - d\sqrt{b\,c} - b\sqrt{d\,x} + c\sqrt{d\,x} = 0$

$\therefore\ \sqrt{c\,x}\,(\sqrt{b\,x} + \sqrt{c\,d}) - \sqrt{b\,d}\,(\sqrt{b\,x} + \sqrt{c\,d}) = 0$

Ya da $(\sqrt{c\,x} - \sqrt{b\,d})\,(\sqrt{b\,x} + \sqrt{c\,d}) = 0$

$\therefore\ \sqrt{c\,x} - \sqrt{b\,d} = 0$

ve $\sqrt{b\,x} + \sqrt{c\,d} = 0$

$\therefore \quad c\,x = b\,d$

ve $b\,x = c\,d$

$x = b\,d\,/\,\mathrm{c}$

$x = c\,d\,/\,b$

(111) İki terimlisinde bilinmeyen bulunan herhangi bir denklemde bu iki terimden birinde bulunan bilinmeyenin üssü, diğer teriminde bulunan bilinmeyenin üssünün iki katı olursa bu tür denklemler ikinci dereceden denklem gibi çözülür.

Örnek 1;

$z + 4z^{1/2} = 21$ olsa z istenendir.

$z + 4z^{1/2} + 4 = 21 + 4 = 25$

$z^{1/2} + 2 = \pm 5$

$\therefore \quad z = 9$ ya da 49

Örnek 2;

$x^{-1} + x^{-1/2} + 1/4 = 6$ olsa x istenendir.

$x^{-1} + x^{-1/2} + 1/4 + 1/4 = 6 + 1/4 = 25/4$

$x^{-1/2} + 1/2 = \pm\, 5/2$

$x^{-1/2} = -\, 1 \pm 5/2 = 2$ ya da $-\,3$

$x^{1/2} = 1/2$ ya da $-\, 1/\,3$

$x = 1/4$ ya da $1/\,9$

Örnek 3;

$y^4 - 6\,y^2 - 27 = 0$ olsa y istenendir.

$y^4 - 6\,y^2 = 27$

$y^4 - 6\,y^2 + 9 = 27 + 9 = 36$

$y^2 - 3 = \pm\, 6$

$y^2 = 3 \pm 6 = 9$ ya da $-\,3$

$\therefore \quad y = \pm\, 3$ ya da $\pm \sqrt{-3}$

Örnek 4;

$y^6 + r\,y^3 + l^3 / 27 = y^6 + r\,y^3 = - l^3 / 27$

$y^6 + r\,y^3 + r^2/ 4 = r^2/ 4 - l^3 / 27$

$y^3 + r / 2 = \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{l^3}{27}}$

$y^3 = - r / 2 \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{l^3}{27}}$

$\therefore \quad y = \sqrt[3]{- \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{l^3}{27}}}$

(112) z harfi bilinmeyenini içeren herhangi bir çok terimli, $z^2+qz=l$ şekline dönüştürülmesi mümkün olan bazı diğer denklemleri ikinci dereceden denklem gibi yani tam kare kılınarak daha kolay bir şekilde gösterilebilir.

Örnek 1:

$b\,x^2 + \sqrt{b\,x^2 - c\,x + d} = c\,x$ denkleminden x istenendir.

Nakil ile $b\,x^2 - c\,x + \sqrt{b\,x^2 - c\,x + d} = 0$

Her iki tarafa d eklenerek $b\,x^2 - c\,x + d + \sqrt{b\,x^2 - c\,x + d} = d$

Tam kare kılınarak $(b\,x^2 - c\,x + d) + \sqrt{b\,x^2 - c\,x + d} + 1/4 = d + 1/4$

$(\sqrt{b\,x^2 - c\,x + d}\,) + 1/2 = \pm \sqrt{d + 1/4}$

$(\sqrt{b\,x^2 - c\,x + d}\,) = \pm \sqrt{4\,d + 1/4} - 1/2$

$b\,x^2 - c\,x + d = \{ \pm \sqrt{4\,d + 1/4} - 1/2\}^2$

Bu şekilde adı geçen denklem basit bir ikinci dereceden denkleme dönüştürüldüğünden bu denklemden x bilinmeyeninin değeri aynen eskisi gibi bulunur.

Örnek 2:

$x^2 - x + 5\sqrt{2\,x^2 - 5\,x + 6} = 1/2\;(3\,x + 33)$ denkleminden x bilinmeyeni istenendir.

$2\,x^2 - 2\,x + 10\sqrt{2\,x^2 - 5\,x + 6} = 3\,x + 33$

$2\,x^2 - 5\,x + 6 + 10\,\sqrt{2\,x^2 - 5\,x + 6} = 39$

$(\,2\,x^2 - 5\,x + 6\,) + 10\,\sqrt{2\,x^2 - 5\,x + 6} + 25 = 39 + 25 = 64$

$\sqrt{2\,x^2 - 5\,x + 6} + 5 = \pm\,8$

$\sqrt{2\,x^2 - 5\,x + 6} = \pm\,8 - 5 = 3$ ya da $-\,13$

$2\,x^2 - 5\,x + 6 = 9$ ya da 169

olup çözmek için iki adet ikinci derece denklem geriye kalır.

(113) Birden fazla denklem ve bilinmeyen bulunur ise birinci derece denklemde açıklandığı üzere bu denklemlerin bilinmeyenlerinden yalnız birini içeren bir denkleme dönüştürüldükten sonra bu denklem çözülüp bu bilinmeyenin değeri bulunur. Diğer denklemle bu bilinmeyenin eşiti yerine konularak kalan bilinmeyenin değerleri de bulunur.

Örnek 1;

$x - \frac{x-y}{2} = 4$

$y - \frac{x+3\,y}{x+2} = 1$ $\quad x$ ile y bilinmeyenleri istenendir.

birinci denklemden $2\,x - x + y = 8 \quad x + y = 8 \quad x = 8 - y$

ikinci denklemden $x\,y + 2\,y - x - 3\,y = x + 2$

ya da $x\,y - 2\,x - y = 2$

konulması ile $(8 - y)\,y - 2\,(8 - y) - y = 2$

$8\,y - y^2 - 16 + 2\,y - y = 2$

$9\,y - y^2 = 16 + 2 = 18$

$y^2 - 9\,y = -\,18$

$y^2 - 9\,y + 81/4 = 81/4 - 18$

$y - 9/2 = \pm\,3/2$

$\therefore\;\; y = 9\;\; 3/2 = 6$ ya da 3

ve $x = 8 - y = 2$ ya da 5

Bu tür denklemler bazı özel yöntemler vasıtasıyla kolay bir şekilde çözülür. Adı geçen yöntemin ugulamaları da çok fazla işlemle elde edilir.

Örnek 2;

$x^2 + y^2 = 65$

$x\,y = 28$ x ile y bilinmeyenlerinin bulunması istenendir.

İkinci denklemden $2\,x\,y = 56$

Bu denklem birinci denklem ile toplandığında

$x^2 + 2\,x\,y + y^2 = 121$ ve çıkarıldığında

$x^2 - 2\,x\,y + y^2 = 9$ iş bu iki denklemin karekökleri alındığında

$x + y = \pm 11$ ve

$x - y = \pm 3$

toplandığında $2\,x = \pm 14$

$\therefore\ x = 7$ ya da -7 ve

$y = 4$ ya da -4

Örnek 3;

$x^2 / y + y^2 / x = 18$

$x + y = 12$ x ile y istenendir.

birinci denklemden $x^3 + y^3 = 18\,x\,y$

ikinci denklemden $x^3 + y^3 + 3\,x\,y\,(x + y) = 1728$

konulması ile $18\,x\,y + 36\,x\,y = 1728$

$54\,x\,y = 1728$

$\therefore\ x\,y = 32$

ve aynı şekilde $x^2 + 2\,x\,y + y^2 = 144$

ve $4\,x\,y = 128$

$\therefore\quad x^2 - 2\,x\,y + y^2 = 16$

$x - y = \pm 3$

$x + y = 12$

$\therefore\quad 2\,x = 16$ ya da 8

$x = 8$ ya da 4 ve

$y = 4$ ya da 8

(114) Bazen iki bilinmeyenlerden birinin yerine ikinci bilinmeyen ile diğer üçüncü bir bilinmeyenin çarpım sonucunu elde etmek birçok kurala sebep olur.

Örnek 4;

$x^2 + xy = 12$

$xy - 2y^2 = 1$ x ile y istenendir.

Varsayalım $x = ey$ olsa $e^2 y^2 + e y^2 = 12$

$e y^2 - 2 y^2 = 1$

Birinciden $y^2 = 12 / e^2 + e$

İkinciden $y^2 = 1 / e - 2$

$\therefore$ $12 / e^2 + e = 1 / e - 2$

Ya da $e^2 + e = 12 e - 24$

$e^2 - 11 e = - 24$

$e^2 - 11 e + 121/4 = - 24 + 121/4 = 25/4$

$e - 11/2 = \pm 5/2$

$\therefore$ $e - 11 \pm 5/2 = 8$ ya da 3

ve $y^2 = 1 / e - 2 = 1/6$ ya da 1

$\therefore$ $y = \pm 1 / \sqrt{6}$ ya da ± 1 ve

$x = e y = \pm 8 / \sqrt{6}$ ya da ± 3

(115) Bazen iki bilinmeyenin yerine diğer iki bilinmeyenin toplamıyla farkları konularak işlem kolaylaştırılabilir.

Örnek 5;

$x + y = 4$

$(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280$ x ile y istenendir.

Farz edelim $x = d + v$

ve $y = d - v$ olsalar;

$x + y = 2 d = 4$

$\therefore$ $d = 2$

ve aynı şekilde $x^2 + y^2 = (2 + v)^2 + (2 - v)^2$

$= 8 + 2 v^2$

ve $\qquad x^3 + y^3 = (2 + v)^3 + (2 - v)^3$

$= 8 + 12v + 6v^2 + v^3 + 8 - 12v + 6v^2 - v^3$

$= 16 + 12v^2$

$\therefore \quad (8 + 2v^2)(16 + 12v^2) = 280$

Ya da $(4 + 2v^2)(4 + 3v^2) = 35$

$16 + 16v^2 + 3v^4 = 35$

$v^4 + 16/3\, v^2 = 19/3$

$v^4 + 16/3\, v^2 + 64/9 = 19/3 + 64/9 = 121/9$

$v^2 + 8/3 = \pm\, 11/3$

$\therefore \quad v^2 = \pm\, 11 - 8/3 = 1$ ya da $- 19/3$

ve $v = 1$

$\therefore \quad x = d + v = 3$

ve $y = d - v = 1$

2.2.22. İkinci Dereceden Denklemleri Ortaya Çıkaran Problemler

(116) Problem 1- Bir adam 80 kuruşa bir takım (kümes?) tavuk satın almış olsa eğer satın alınan tavukların sayısı dört tane fazla olsa idi, her birinin fiyatı birer kuruş daha düşük olacaktı. Tavukların sayısı ile her birinin fiyatı ne kadardır?

x tavukların sayısı varsayılsa;

bu durumda 80 / x her birinin fiyatı olur ve $\frac{80}{x+4}$ ikinci varsayıma göre her birinin fiyatı olur.

$\therefore \quad \frac{80}{x+4} = \frac{80}{x} - 1$

$80 = \frac{80x + 320}{x} - x - 4$

$80x = 80x \pm 320 - x^2 - 4x$

$x^2 + 4x = 320$

$x^2 + 4x + 4 = 320 + 4 = 324$

$x + 2 = \pm\, 18$

$\therefore \quad x = \pm\, 18 - 2 = 16$ yahud $- 20$

ve 80/ x = 80 / 16 = 5 her birinin fiyatı 5 kuruştur.

Bu örnekte olduğu gibi diğer örneklerde ve özellikle genel matematik problemlerinin çözümüde ve elde edilen cevapların hepsinde bu problemlerin kurallarına uymamasının sebebi cebirsel niceliklerin, sözlü anlatımdan da genel olmasıdır özel şartları gösteren diğer denklem kurallarını içerip diğer teorilere de cevap olabilir. Nitekim yukarıda verilen örnekte *x* yalnız pozitif olan bir değeri göstermeyip hem pozitif hem negatif olan bir değeri gösterir. (Madde 106)

$\frac{80}{x+4} = \frac{80}{x} - 1$ denklemde *x* negatif olsa ya da bu zikredilen *x* değeri tavukların sayısının noksaniyetini gösterirse zikr olunacak denklemin çözümü için bir özel ifade meydana gelmiş olur. Yani bir adam 80 kuruşa bir takım tavuk satın alıp eğer bu tavukların sayısı 4 adet noksan olsa idi her birinin fiyatı 1 kuruş fazla olacak idi. Bu surette kaç adet tavuk satın alındığı istenendir demek olur.

(117) Problem 2: 20 parmak uzunlukta olan doğru çiziyi bir şekilde iki kısma bölmek istenmektedir ki zikredilen bu doğru çizginin kısımlarından uzun olanın karesi, kısa olan çizginin tamamı ile çarpımına eşit olur.

x büyük kısmı varsayalım 20-*x* kısmı olur ve

$x^2 = (20 - x) 20 = 400 - 20x$

$x^2 + 20 x = 400$

$x^2 + 20 x +100 = 400 +100 =500$

$x + 10 = \pm \sqrt{500}$

$\therefore\ x = \sqrt{500} - 10$ yahud $x = -\sqrt{500} - 10$

Önceki örnekte bahsi geçen durum iş bu örneğe de tatbik olunabilir. *x* bilinmeyeninin bulunan negatif değeri boş ve anlamsız olmayarak eğer zikredilen doğru çizgi $\sqrt{500} + 10$ parmak miktarı bir tarafı bulunsa zikredilen çizginin tamamı ile kısa kısmın çarpımının adı geçen çizginin uzun kısmının karesine eşit olduğunu gösterir.

(118) Problem 3

Öyle bir iki sayı olsun ki bu iki sayının toplamları ve çarpımları ve kareleri toplamı birbirine eşit olsun.

Varsaylım $x + y$ ve x-y iki sayı olsun, toplamları $2x$

çarpımları x^2-y^2

Kareleri toplamı $2x^2+2y^2$

mesele ile $2x = 2x^2 + 2y^2$ yahud $x = x^2 + y^2$

ve aynı şekilde $2x = x^2 - y^2$ toplanması ile $3x = 2x^2$

$\therefore\ x = 3/2$

$2x = x^2 - y^2$ ya da $3 = 9/4 - y^2$

$y^2 = 9/4 - 3 = 9 - 12 / 4 = -3/4$

$\therefore\ y = \pm\sqrt{-3}/2 \qquad x + y = 3 + \sqrt{-3}/2 \qquad x - y = 3 - \sqrt{-3}/2$

Çünkü her bir niceliğin karesi pozitif olup , negatif bir niceliğin karekökü olmayacağından x, y bilinmeyenlerinin yukarıda bulunan değerlerinden problemin teorisine bakarak bu iki sayının olmadığı anlaşılır.

2.2.23. Oran

(119) Herhangi dört nicelikten ilk ikisinin herhangi katı veya parçası olduğu gibi üçüncü ve dördüncü o kadar katı ya da parçası olsa yani $b/c = d/e$ olduğunda bu $b\ c\ d\ e$ dört niceliğe orantılı nicelikler denir. Bu şekilde b:c :: d:e ya da $b:c = d:e$ yazılarak b niceliğinin c niceliğine oranı d niceliğinin e niceliğine oranı gibidir diye tabir olunur. Burada b ile e niceliklerine bu oranın dışları (*tarafeyn*) ve c ile d niceliklerine içleri (*vasateyn*) diye genellenir.

(120) Dört nicelik orantılı ise dışların çarpımı içlerin çarpımına eşittir. Örnek $b\ c\ d\ e$ bu dört miktar orantılı ise $b/c = d/e$ (Madde 119) ve denklemin iki tarafı ce ile çarpıldığında $be = cd$ olur.

Sonuç 1: Eğer birincinin ikinciye oranı, ikincinin üçüncüye oranı gibi ise dışların çarpımı, içlerin karesine eşit olur.

Sonuç 2: Bir oranın dört teriminden herhangi üçü biliniyorsa $be = cd$ denkleminden dördüncüsü bulunabilir. Buradan matematikteki dörtlü orantı ortaya çıkar.

(121) Eğer iki niceliğin çarpımı, diğer iki niceliğin çarpımına eşit olursa bu dört niceliğin orantılı olarak çarpım sonuçlarından birinin çarpanları dışlar, diğerinin çarpanları içler olur.

Örneğin: $xy = bc$ ise her iki taraf by ye bölündüğünde $x/b = c/y$ ya da $x{:}b :: c{:}y$ olur. (Madde 119)

(122) Eğer $b : c :: d : e$ ve $d : e :: v : q$ olsa $b : c :: v : q$ olur.

Çünkü $b / c = d / e$ ve $d / e = v / q$ olduğundan $b / c = v / q$ ya da $b : c :: v : q$ olur.

(123) Eğer dört nicelik orantılı ise tersine döndürüldüğünde de orantılı olurlar. Yani $b : c :: d : e$ olsa $c : b :: e : d$ olur. Çünkü: $b / c = d / e$ olur.

Bu orantılı iki nicelikten her birine bölünmesi yani dıştakiler ters çevrildiğinde $c / b = e / d$ o da $c : b :: e : d$ o da $c : b :: e : d$ olur.

(124) Eğer dört nicelik orantılı ise değiş tokuş yoluyla da orantılı olurlar. Yani $b{:}c :: d : e$ olsa $b : d :: c : e$ olur. Zira nicelikler orantılı olduğundan $b / c = d / e$ olur, her iki taraf c / d ile çarpıldığında $b / d = c / e$ ya da $b : d : : c : e$ olur.

Diğer taraftan yukarıda bahsedilen dört nicelik tek cinsten olmadıkça değiş tokuş yolunun yapılması mümkün olamaz. Zira iş bu değiş tokuş yolunda ilk nicelik ikinci niceliğin herhangi katı ya da parçası olması varsayılmıştır. Nitekim bir düz çizginin diğer düz çizgiye oranı, bir ağırlığın diğer ağırlığa oranı gibidir. Ama bir düz çizginin bir ağırlığa oranının büyüklük cihetiyle hiçbir oranı yoktur. Bu çeşit örneklerde eğer dört nicelik sayı ile gösterilmiş ise ya da miktarlar tek cinsten ise değiş tokuş yöntemi uygulanması mümkün olur. Meydana gelen oran da gerçek olmuş olur.

(125) Eğer dört nicelik orantılıysalar birinci ile ikincinin toplamının ikinciye oranı üçüncü ile dördüncünün toplamının dördüncüye oranı gibi olur. Bu işleme, **terkîb tarîkı** (bileşik orantılar) denir.

Örnek: $b : c :: d : e$ ise
$(b+c) : c :: (d+e) : e$ olur.
Çünkü $b/c = d/e$ ise iki tarafa 1 eklendiğinde
$(b/c) + 1 = (d/e) + 1$ yani $(b+c) / c = (d+e) / e$
ya da $(b + c) : c :: (d+e) : e$ olur.

(126) Aynı şekilde çıkarma yoluyla birinci ile ikincinin aralarındaki farkın ikinciye oranı, üçüncü ile dördüncünün aralarında olan farkın dördüncüye oranı gibidir.

Çünkü $b / c = d / e$ ise her iki taraftan 1 çıkarıldığında

$(b/c) - 1 = (d/e) - 1$

Yani $(b - c) / c = (d - e) / e$

Ya da $(b - c) : c :: (d - e) : e$ olur.

(127) Aynı şekilde (**kalp**) ters döndürme yoluyla birincinin ikinci ile aralarında olan farkına oranı üçüncünün dördüncü ile aralarında olan farkına oranı gibidir.

Önceki maddede olduğu gibi $(b - c) / c = (d - e) / e$ ve $c / b = e / d$ (Madde 123)

ise $(b - c) / c \times (c / b) = (d - e) / e \times (e / d)$ ya da $(b-c) / b = (d-e) / d$

Yani $(b-c) : b :: (d-e) : d$

Ters döndürülmesi yoluyla $b : (b-c) :: d : (d-e)$ olur.

(128) Dört miktar orantılı ise birinci ile ikincinin toplamının aralarında olan farka oranı, üçüncü ile dördüncünün toplamının aralarında olan farka oranı gibidir.

Örnek: $b : c : : d : e$ olsa

$b + c : b - c : : d + e : d - e$ olur.

madde ile $b + c / c = d + e / e$ olup

ve madde ile $b - c / c = d - e / e$ olduğundan bu takdirce

$b + c / c \div b - c / c = d + e / e \div d - e / e$ olur. (açıklama 4)

ya da $b + c / b - c = d + e / d - e$

yani $b + c : b - c : : d + e : d - e$ olur.

(129) Aynı şekilde çok sayıda miktar orantılı ise bir öncekinin kendi ikinciline oranı öncekilerin toplamının ikincilleri toplamına oranı gibidir.

Örnek: $b : c : : d : e : : v : q$ olsa

$b : c : : b + d + v + \mathrm{lh} : c + e + q + \mathrm{lh}$ olur

Çünkü $b / c = d / e$ olduğundan $b e = c d$ olur.

Böylece $b q = c v$

ve aynı şekilde $b c = v b$ olduğundan

bu takdirce $b\,c + b\,e + b\,q \;=\; c\,b + c\,d + c\,v$

ya da $b\,(\,v + e + q\,) = c\,(\,b + d + v\,)$ olarak (madde 121) ile

$$b : c :: b + d + v : v + e + q$$

olur. Kalan miktarlar için de bu yöntemle olur.

(130) Orantılı dört miktardan birinci ile ikinci herhangi bir miktar ile çarpılır ya da bölünürse aynı şekilde üçüncü ile dördüncü de bir miktar ile çarpılırsa ya da bölünürse ortaya çıkan miktarlar orantılı olur.

Örnek: $b : c :: d : e$ olsa $m\,b : m\,c :: d\,/\,n : e\,/\,n$ olur.

çünkü $b\,/\,c = d\,/\,e$ olduğundan bu yüzden (madde 35) ile

$m\,b\,/\,\mathrm{m}\,c = d\;\;1\,/\,n\;\;/\,e\;1\,/\,n$ ya da $m\,b : m\,c :: d\,/\,n : e\,/\,n$ olur.

(131) Orantılı dört miktardan birinci ile üçüncü herhangi bir miktar ile çarpılır ya da bölünürse aynı şekilde ikinci ile dördüncü diğer bir miktar ile çarpılır ya da bölünürse elde edilen miktarlar da orantılı olurlar.

Çünkü $\frac{b}{c} = \frac{d}{e}$ olduğundan bu şekilde $\frac{mb}{c} = \frac{md}{e}$ olur.

Ve $\frac{mb}{c\times\frac{1}{n}} = \frac{md}{e\times\frac{1}{n}}$ ya da $m\,b : \frac{c}{n} :: m\,d : \frac{e}{n}$ olur.

Sonuç: Herhangi bir oranda ikinci ile dördüncü terimlerin yerine zikredilen iki terim ile orantılı olan iki nicelik yerine konulursa yine oran sağlanır. Çünkü $\frac{c}{n}$ ile $\frac{e}{n}$ aralarında olan oran, c ile e arasında olan orana eşittir. (Madde 130)

(132) İki sıra orantının benzer benzerine bulunan terimleri birbirleri ile çarpılırsa çarpım sonuçları da orantılı olurlar.

Örnek: $b : c :: d : e$ olsa ve $v : q :: t : h$ olsa;

Ve aynı şekilde $b\,v : c\,q :: d\,t : e\,h$ olur.

Çünkü $b\,/\,c = d\,/\,e$ olup ve $v\,/\,q = t\,/\,h$ olduğundan bu şekilde

$\frac{b}{c} \times \frac{v}{q} = \frac{d}{e} \times \frac{t}{h}$ ya da $\frac{bv}{cq} = \frac{dt}{eh}$

yani $b\,v : c\,q :: d\,t : e\,h$ olur.

Bu işlem **tenâsüb te'lîfi** diye isimlendirilir. Uygulama çok sayıda oranlarda da doğru sonuçlar verir.

(133) Orantılı dört miktarın eşit kuvvetleri ve eşit kökleri de orantılı olurlar.

Örnek: $b : c : : d : e$ olsa $\frac{b}{c} = \frac{d}{e}$ olduğundan her iki taraf *n*. kuvvete yükseltildiğinde $b^n / c^n = d^n / e^n$ ya da $b^n : c^n : : d^n : e^n$ olur. *n üssü* kere tam sayı ya da kesir olsun sonuç aynıdır.

2.2.24. Sayıların Oranı (Sayı Örüntüsü)

(134) Herhangi bir ortak fark ile artan ya da eksilen niceliklere, **nisbet-i adediye (***sayı örüntüsü***)** üzere nicelikler denir.

Örnek: 1, 3, 5, 7, 9 ve sonrakiler ortak

b, *b+d*, *b+2d*, *b+3d* ve sonrakiler

b, *b-d*, *b-2d*, *b-3d* ve sonraki nicelikler, sayı örüntüsü8 ise ve eğer b niceliği ilk terimi, *b+d* ikinci terimi, *b+2d* üçüncü terimi ve *b+3d* dördüncü terimi ise *b*+ (*n-1*)d de *n.* terimi olmuş olur.

(135) Sayısal oran(*sayı örüntüsü*) üzere bulunan ard arda gelen niceliklerin ilk terimiyle son terimi toplamı terimlerinin sayısının yarısına çarpıldığında çarpım sonucu bu niceliklerin toplamına eşit olur.

Örnek: *b* ilk terimi, *d* ortak farkı, *n* terim sayısını, *l* son sayıyı, *m* ard arda gelen terimlerin toplamını ifade etse;

Bu durumda $b + (b + d) + (b + 2 d) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + l = m$
Aynı şekilde $l + (l - d) + (l - 2 d) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b = m$

Bu iki silsile toplandığında;

$(b + l) + (b + l) + (b + l) + \ldots\ldots\ldots\ldots$ *n*. terime değin $=2m$
Ya da $(b + l) n = 2 m$
$\therefore \quad m = (b + l) n / 2$
Sonuç 1: Çünkü $l = b + (n\text{-}1) d$ olduğundan *l* son terimin bu eşiti yukarıdaki kuralda yerine konulduğunda $m = \{ 2 b + (n - l) d \} \frac{n}{2}$ olur.

Sonuç 2: Bu *m* ve *b* ve *n* ve *d* dört miktardan herhangi üçü bilinirse dördüncüsü de bu $m = \{ 2 b + (n - l) d \} \frac{n}{2}$ kural yardımıyla bulunabilir.

Örnek 1; Bu 1, 3, 5, 7 ve sonrakiler serinin 14 teriminin toplamının bulunması istenirse bu bölümde ;

b= 1, d=2 ve n=14 olduğundan bu durumda

m= (2+26) × $\frac{14}{2}$ = 196

Örnek 2; 11, 9, 7, 5 ve sonraki serinin 9 teriminin toplamının bulunması istenirse ;

Bu örnekte b =11, d=-2, n=9 olduğundan bu durumda

m= (22-16) × $\frac{9}{2}$ = 6 × $\frac{9}{2}$ = 27

Örnek 3; Bir sayısal oranın ilk terimi 14 ve sekiz terimi toplamı 28 olduğu biliniyorsa ortak farkı ile serinin kendisi istenirse:

$\{ 2b + (n - 1)d\} \frac{n}{2} = m$ olduğundan

$2b + (n\text{-}1)\, d = \frac{2m}{n}$

$(n\text{-}1)\, d = \frac{2m}{n} - 2b = \frac{2m-2bn}{n}$

İse $d = \frac{2m-2bn}{n\times(n-1)}$

Bu örnekte m =28 ve b=14 ve n=8 olduğundan

ise $d = \frac{56-224}{8\times7} = \frac{7-8}{7} = -3$

Bu durumda istenilen dizinin 14, 11, 8, 5 ve sonrakiler olur.

Örnek 4; Bir sayı dizisinin ilk terimi $3\frac{1}{3}$, ortak farkı $1\frac{4}{9}$ ve terimleri toplamının 22 olduğu biliniyorsa ve terimlerin sayısı istenirse;

$m = \{ 2\, b + (n - 1)d\} \frac{n}{2}$ genel kuralı örneğe uygulanırsa

m=22 b= $3\frac{1}{3}$ d= $1\frac{4}{9}$

İse $22 = \{ \frac{20}{3} + \frac{(n-1)13}{9} \} \frac{n}{2}$

Ya da $396 = 47n + 13n^2$

Olduğundan; bu ikinci derece denklemin çözümü ile *n* bilinmeyeninin değeri bulunarak terim sayısının 4 olduğu görülür. Bu örnekte ve bunun gibi diğer örneklerde varsayımımıza bakarak *n* miktarının negatif olan değeri hesaba katılmaz.

(136) Bir sayı dizisinin ilkiyle sonuncusundan eşit uzaklıktaki alınan herhangi iki terimin toplamı, ilk terimi ile son terimin toplamına eşittir. İş bu teorem 135. maddede ispat olunmuş ise de aşağıdaki gibi de ispat olunabilir.

Şöyle ki *b* ve *c* ve *d* ve e ve v ve qve y miktarları sayı dizisi oluştursalar, sayı dizisi tanımıyla; $c - b = y - q$ ya da $c + q= b + y$ ve yine

$d - c = q- v$ olduğundan

$d + v = c + q = b + y$ olur ve bu şekilde ispat edilir.

(137) Bir sayı dizisinin terim sayısı tek ise orta terimi ilk terim ile son terimin toplamının yarısına eşittir.

Örneğin; *k* harfi ile orta terim ve *q r* harfiyle de ilk ve son terimler gösterilmiş olunursa sayı dizisinin açıklamasından;

$q\text{-}k = k\text{-}r$ olduğundan $2k = q+r$ olup *q* ve *r* nicelikleri bu sayı dizisinin birinci ve sonuncusundan eşit derecelerdeki terimler olduğundan $q+r=b+l$ önceki teorem ile $2k=b+l$ olur.

(138) Yukarıda geçen iki teorem yardımıyla sayı dizisinin toplamı bazen kolaylıkla bulunabilir. Şöyle ki toplamı istenen sayı dizisinin terim sayısı çift ise ve yarısından daha fazla terimleri biliniyorsa, istenen toplamı bulmak için bu sayı dizisinin başından ve sonundan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin toplanması, son terimi ile toplamı ya da farkı alınarak kolayca bulunur. Eğer terim sayısı tek ise istenen orta terimin biri ise açıkça ispat olunduğu üzere orta terim terim sayısıyla çarpıldığında yine istenen toplam elde edilir.

Örnek 1: İstenen toplam olan iş bu $\frac{2}{3} + \frac{7}{15} + \frac{4}{15} + \frac{1}{15}$ +ve devamı

7. terime değin silsilede $\frac{1}{15}$ orta terim olduğundan;

istenen toplam $\frac{1}{15} \times 7 = \frac{7}{15}$ olur.

Örnek 2: İstenen toplam,$1 + \frac{3}{2} + 6 + \frac{5}{2}$ ve devamı; altıncı terime değin silsilede üçüncü ve dördüncü terimler baştan ve sondan eşit sıradakiler olduklarından istenen toplam $(2 + \frac{5}{2}) \times 3 = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$ olur.

2.2.25. Geometrik Oran

(139) Herhangi çoklu nicelikten birincinin ikinciye oranı, ikincinin üçüncüye oranı gibi olup, ikincinin üçüncüye oranı üçüncünün dördüncüye oranı gibi yani her bir terim, ardından gelen terimin herhangi bir katı veya parçası olduğunda bu niceliğin matematik ya da geometrik dizi olduğu bilinir.

Örneğin b ilk terimi ve br ikinci terim olsa, dizi b, br, br^2, br^3, br^4 ve devamı olur. Çünkü $b : br :: br^2 : br^3 :: br^4 : br^5$ ve devamı olur.

(140) Her bir terim öndeki terimin sürekli çarpanı ile çarpım sonucundan ibarettir. Bu sürekli çarpana ise **ortak oran** denir. İkinci terim, birinci terime ya da herhangi bir terim önündeki terime bölündüğünde elde edilebilir.

(141) Dizide bulunan birçok niceliğin toplamının sonucu istenir ise; varsayalım b ilk terim 7 ortak oran n adet sayısı m zikredilen dizinin terimleri toplamı olsun;

$m = b + br + br^2 + br^3 + \ldots + br^{n-2} + br^{n-1}$

$mr = br + br^2 + br^3 + br^4 + \ldots + br^{n-2} + br^{n-1} + br^n$ olup ilk dizi ikinci diziden çıkarıldığında, $rm - m = br^n - b$

$\therefore\ m = (br^n - b) / (r-1) = b \times (r^n - 1 / r-1)$ olur.

Toplamı istendiği için bir genel kural elde edilmiş olur.

Sonuç 1; Eğer l harfi son terim ise $l = br^{n-1}$ olduğundan bu durumda $m = \frac{r\ l\ -\ b}{r-1}$ olur. Bu denklemden m, r, l ve b dört bilinmeyenin herhangi üçü verilirse dördüncü bulunabilir.

Sonuç 2; Yukarıda varsayılan r niceliği **kesr-i sahih** basit kesir olursa n arttıkça r^n ya da br^n niceliğinin miktarı sonsuza kadar azalır, sonsuz olduğunda ise br^n niceliği de azalır. Toplamı br^n-r / r-1 niceliğine eşit olan dizinin bu bölümde toplamı -b / r-1 yani b / 1-r olmuş olur.

Diğer taraftan bu b / r-1 niceliği, yukarıda belirtilen dizinin toplamı olarak sayılsa da aslında toplamı olmayıp, terimlerin en yakın toplamına eşit olduğundan, bu toplamın doğruluğunu gösterir. Çünkü bu dizi b niceliğinin 1-r niceliği üzerine bölümünden elde edilen toplamı istenen yere b / 1-r niceliği hatasız konulabilir.

Örnek 1; 1, 2, 3, 4, 8 ve devamı dizinin 20 teriminin toplamı istenir ise.

Burada b=1 r=2 n=20 olduğundan $m = (1 \times 2^{20} - 1) / (2-1) = 2^{20}-1$ olur.

Örnek 2; 64, 16, 4 ve devamı dizinin 12 teriminin toplamı istenir ise;

b=64 r= 1/4 n=12 olup,

$\therefore \quad m = 64 \frac{\left(\frac{1}{4}\right)12 - 1}{\frac{1}{4} - 1} = (4^3 / 4^{11}). (4^{12} - 1) / (4-1) = 1/4^8 . (4^{12} - 1) / 3$ olur.

Örnek 3; 1, -3, 9, -27 ve devamı 12 teriminin toplamı istenir ise;

$b = 1 \quad r = -3 \quad n = 12$

$\therefore m = (-3)^{12} - 1 / (-3 - 1) = - (3^{12}-1) / 4$

Örnek 4; 1- 1/2 + 1/4 - 1/8 + leh geometrik dizinin sonsuz toplamı istenendir.

Bu yerde b=1 r= -1/2

$\therefore$ m= 1 / (1+1/2) = 2 /3 olur.

2.2.26. Permütasyon ve Kombinasyon (Evza ve Terkibat)

(142) Birden fazla *harfin* niceliğin farklı şekilde sıralanmasına o harflerin **permütasyonu (*evza'*)** denir. Örneğin *b, c, d* üç nicelik, ikişer ikişer alınırsa permütasyonu, *bc, cb, bd, db, cd* ve *dc* olur.

(143) Sıra ve düzenine uyulmaksızın harflerden oluşan farklı birleşmelere ise **kombinasyon*(terkîbât)*** denir. Örneğin *b*, *c* ve *d* niceliklerine ikişer ikişer alınarak birleştirilerek *bc*, *bd* ve *cd* olur. *bc*, *cb* her ne kadar farklı sıralanmış iseler de *eşleşmeleri(terkîb)* birbirinin aynı olmuş olur.

(144) *n* adet harflerden ikişer ikişer alınarak *n* (*n*-1) adet durum ve üçer üçer alınarak *n* (*n*-1) (*n*-2) adet durum oluşturulur. Varsayalım *b* ve c ve *d* ve *e* ve *v* ve devam eden gibi *n* kadar harften her birinin önüne *b* konularak bu şekilde *n*-1 adet durum oluştuğu gibi yine n adet harften her birinin önüne c konularak n-1 tane durum oluşturulur. Diğerleri de buna göre oluşturulur. Bu durumda harflerden bc ve cb ve cd ve dc ve devam eden permütasyon gibi n (n-1) adet durum meydana gelir. Yine c ve d ve e yani n-1 harften ikişer ikişer alınarak yukarıda açıklandığı üzere (n-1)(n-2) durum oluşur. Bu birçok permütasyonun her birinin önüne b konularak üçer üçer alınmış (n-1)(n-2) durum oluşur ki her birinin önüne b bulunmuş olur. Bu yönteme göre c ve d ve e ve … devam eden harflerden her biri önüne yazılmış olarak bu harflerin her biri için (n-1)(n-2) durum oluşur. Yukarıda adı geçen harflerin sayısı n olduğundan tamamı için üçerli olarak n(n-1)(n-2) permütasyon meydana gelip istenen elde edilir.

(145) r adedi birden alınan n adet harf için durum bulunmak istendiğinde (madde 144) açıklandığı üzere zikredilen harfleri;

ikişer ikişer alınarak = $n\ (n-1)$

üçer üçer alınarak = $n\ (n-1)\ (n-2)$

ve aynı şekilde dörder dörder alınarak = $n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)$

adet durum meydana gelip bundan açıkça görünen genel kural olduğu farz olunarak b ve c ve d ve e ve… devam eden yani n adet niceliğin (r-1) adedinin birden alınmasıyla $n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (n-r+2)$ durum elde edilip b terk edildiğinde geri kalan c ve d ve e ve … devam eden yani n-1 niceliğinin r-1 adedi birden alınarak

$(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (n-r+1)$ durum meydana geldiğinden her birinin önüne b konulduğunda r adedi birden alınmış bir takım permütasyon(durum) oluşur ki her birinin önünde b bulunup ve sayısı da $(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (n-r+1)$ olmuş olur. Ve c için de bu kadar permütasyon(durum) sayısı bulunup her birinin önünde c bulunur. Bu takdirce r adedi birden alınmak üzere n adet nicelikten alınması mümkün olan permütasyon sayısı $(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (n-r+1)$ olup istenen elde dilir.

Sonuç cümlesi birden alınan n adet niceliğin kombinasyon sayısı

$n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (n-n+1) = n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3\times2\times1$ ya da

$= 1\times2\times3\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ n$ olur.

(146) *n* tane eşyadan ikişer ikişer teşkili mümkün olan kombinasyon sayısı $n\frac{n-1}{2}$ ve üçer üçer $n\frac{n-1}{2}\ \frac{n-1}{3}$ olur. Çünkü *n* adet niceliğin ikişer ikişer alınması *n*.(*n*-1) olur. Halbuki *bc* gibi herbir birleşimin *bc* ve *cb* olarak iki durumu olduğundan bu sonuçtan durum sayısı kombinasyon sayısının iki katı olur. *n* tane niceliğin ikişer ikişer kombinasyonu $n\frac{n-1}{2}\ \frac{n-1}{3}$ olmuş olur.

Ve yine *n* adet niceliğin üçer üçer durum sayısı $n\ (n-1)\ (n-2)$ olup üç niceliğin üçer üçer alınması $3 \times 2 \times 1$ olduğundan (Madde 145 Sonuç) bu bölümde durum sayısı kombinasyon sayısının 3×2×1 katı olmuş olarak *n* tane niceliğin üçer üçer kombinasyonu $\frac{n\,(n-1)(n-2)}{1x2x3}$ olmuş olur.

(147) *n* adet niceliğin *r* adedi birden alınmak üzere kombinasyon sayısının bulunması istenirse *n* adet niceliğin *r* adedi birden alınmak üzere durum sayısı $= n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots.\ (n-r+1)$ olup lâkin *r* adet niceliğin hepsi birden alınarak meydana gelen durum sayısı (Madde 145 Sonuç)

$1\times2\times3\times\ \ldots\ldots\ldots\ r$ olmakla bu bölümde durum sayısı kombinasyon sayısından

$1\times2\times3\times\ \ldots\ldots\ldots\ r$ defa fazla olarak *n* adet niceliğin *r* tanesi birden alınmak üzere kombinasyon sayısı $\frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)}{1\times2\times3\times\ldots\ldots\ r}$ olmuş olur.

2.2.27. İki Terimliler (Binom Açılımı)

(148) Tekrar eden çarpanı ile herhangi bir iki terimlinin istenen kuvvete yükseltilmesi (madde 57)deki kural gereğince olur ise de altta açıklanacak kurala, **iki terimli kuralı** (*binom açılımı*) denir. Genel kural aracılığıyla yükseltilme işlemi de kolay bir şekilde yapılabbilir. Varsayalım $x + b$ herhangi bir iki terimliyi göstermiş olsa, bu iki terimlinin *n*. kuvvete yükseltilmesi;

$x^{n} + n\,b\,x^{n-1} + n\ \frac{n-1}{2}\ b^{2}x^{n-2} + n\ \frac{n-1}{2}\ \frac{n-2}{3}\,b^{3}x^{n-3} + \ldots$ ve devamı şeklinde olur. Burada *x* niceliğinin üsleri *n* den başlayarak her bir terim 1 eksilip ve *b* niceliğinin üsleri sıfırdan başlayarak terimler birbiri ardınca 1 artarak devam eder.

Aynı şekilde her bir terimin katsayısı, hemen önündeki terimin katsayısının x niceliği üssüne çarpımının sonucunun yine o terimde bulunan b niceliğinin üssüne 1 artması ile bu toplam üzerine bölünmesinin sonucuna eşit olur.

Şöyle ki, $(x+b)^6 = x^6 + 6\,b\,x^5 + \frac{6\times 5}{1\times 2} b^2 x^4 + \frac{6\times 5\times 4}{1\times 2\times 3} b^3 x^3 + \frac{6\times 5\times 4\times 3}{1\times 2\times 3\times 4} b^4 x^2 + \frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} b^5 x + \frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6} b^6$

$= x^6 + 6\,b\,x^5 + 15\,b^2 x^4 + 20\,b^3 x^3 + 15\,b^4 x^2 + 6\,b^5 x + b^6$ olduğu gibi.

(149) Tam sayı ve pozitif üs için iki terimli kuralı: Sayıların çarpım işleminden görüleceği gibi $(x+b)(x+c) = x^2+(b+c)x+bc$

$(x+b)(x+c)(x+d) = x^3+(b+c+d)x^2+(bc+bd+cd)x+bd$

$(x+b)(x+c)(x+d)(x+e) = x^4+(b+c+d+e)x^3+(bc+bd+cd+be+ce+de)x^2+$ $(bdc+bde+cde+bce)x+bcde$ olur.

Birbirleriyle çarpılan bu $x+b$ ve $x+c$ ve $x+d+\ldots$ ve devam eden iki terimli çarpanlarının sayısı ne kadar olur ise olsun çarpım sonucu, şekil bakımından yukarıda yapılan kural daima geçerli olur. Yani çarpım sonucu x niceliğinin birbiri ardına giden kuvvetleri noksanlaşmalarından ibaret olarak üstündeki kuvvetleri çarpımlarının sayısına eşit ve kalan kuvvetlerin de her bir terimin 1 eksilmesi olur. Aynı şekilde ilk terimin kat sayısı 1 ve ikinci terimin katsayısı da $b\ c\ d\ e\ \ldots$ ve devamı niceliklerinin toplamı ve ikinci terimin katsayısı her bir ikisinin çarpım sonucu toplamı ve dört terimin katsayısı her bir üçünün çarpım sonucu toplamı ve aynı şekilde bu yol ile son terimde n adetten ibaret olan $b\ c\ d\ e\ldots$ve devamı niceliklerinin hepsinin çarpım sonucu toplamı olur. Bu durumda kural gereği n tane çarpan için geçerli olacağı varsayıldığında;

$(x+b)(x+c)(x+d)\ \ldots\ldots\ (x+q) = x^n+b^{/}x^{n-1}+c^{/}x^{n-2}+d^{/}x^{n-3}+q^{/}$ olup bu formülde

$b^{/} = b+c+d+\ldots\ldots\ldots\ldots + q$

$c^{/} = b\,c+b\,d+c\,d+\ldots\ldots\ldots\ldots$

$d^{/} = b\,c\,d+b\,d\,e+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$q^{/} = b\,c\,d\,e\ \ldots\ldots\ldots\ldots$ olduğundan

$b^{/} = b+b+b+$.. devam eden n adet terime kadar $= n\,b$

$c^{/} = b^{2} + b^{2} + b^{2} + \ldots$ devam eden n adet niceliğin ikişer ikişer alınarak kombinasyon sayısı kadar terim sayısına değin $= n \ \frac{n-1}{2} \ b^{2}$

$d^{/} = b^{3} + b^{3} + b^{3} + \ldots$ devam eden n tane harfin üçer üçer alınarak kombinasyon sayısı kadar terime değin $= = n \ \frac{(n-1)(n-2)}{2 \times 3} \ b^{3}$ lh = lh

$q^{/} = b \times b \times b \ldots\ldots\ldots$ n adet çarpanın çarpım sonucu $= b^{n}$

ve aynı şekilde $(x+b)(x+c)(x+d)\ldots\ldots(x+q)$ çarpım sonucu $=(x+b)^{n}$

Bu durumda;

$$(x+b)^{n} = x^{n} + nbx^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{1 \times 2} b^{2}x^{n-2} + \frac{n\,(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} b^{3}x^{n-3} + \ldots + b^{n}$$

Sonuç: $(1 + x)^{n} = 1 + n\,x + \frac{n\,(n-1)}{1 \times 2} x^{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} x^{3} + \ldots$ devamı

Örnek 1:

$(b + c)^{8}$ iki terimlisinin kuvveti alınmak istenirse;

$$(b+c)^{8} = b^{8} + 8b^{8-1}c + \frac{8\,(8-1)}{2} b^{8-2}c^{2} + \frac{8\,(8-1)(8-2)}{2 \times 3} b^{8-3}c^{3} + \frac{8\,(8-1)(8-2)(8-3)}{2 \times 3 \times 4} b^{8-4}c^{4} + \frac{8\,(8-1)(8-2)(8-3)(8-4)}{2 \times 3 \times 4 \times 5} b^{8-5}c^{5} + \frac{8\,(8-1)(8-2)(8-3)(8-4)(8-5)}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} b^{8-6}c^{6} + \frac{8\,(8-1)(8-2)(8-3)(8-4)(8-5)(8-6)}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} b^{8-7}c^{7} + \frac{8\,(8-1)(8-2)(8-3)(8-4)(8-5)(8-6)(8-7)}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8} b^{8-8}c^{8}$$

$$= b^{8} + 8b^{7}c + 28\,b^{6}c^{2} + 56\,b^{5}c^{3} + 70\,b^{4}c^{4} + 56\,b^{3}c^{5} + 28\,b^{2}c^{6} + 8\,bc^{7} + c^{8}$$

Örnek 2:

$(b^{2}+x^{2})^{n}$ iki terimlisinin kuvvetleri alınmak istenirse;

$$(b^{2} + x^{2})^{n} = b^{2n} + nb^{2n-2}x^{2} + \frac{n\,(n-1)}{2} b^{2n-4}x^{4} + \ldots \text{ devam eden}$$

Örnek 3:

$(1 + x)^{1/n}$ iki terimlisinin kuvvetleri alınmak istenirse;

$$(1 + x)^{1/n} = 1 + x^{1/n} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2} x^{2} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{2 \times 3} x^{3} + \ldots \text{devam eden}$$

$$= 1 + \frac{1}{n} x - \frac{(n-1)}{2\,n2} x^{2} + \frac{(n-1)(2n-3)}{2 \times 3 \times n3} x^{3} + \ldots \text{ devam eden}$$

Örnek 4:

$(1 + x)^{-1/n}$ iki terimlisinin kuvvetleri alınmak istenirse;

$(1 + x)^{-1/n} = 1 - \frac{1}{n} x + \frac{(n+1)}{2\,n2} x^{2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{2\,x\,3xn\,3} x^{3} + \ldots$ devam eden

(150) Eğer bir iki terimlinin terimlerinden biri negatif ise tek olan kuvvetleri negatif olacağından kuvvetin sonucu, bu tek kuvvetlerin dahil olduğu terimler de negatif olur.

Örnek 5: $(1-x)^{n} = 1-n\,x + \frac{n\,(n-1)}{2} x^{2} - \frac{n\,(n-1)(n-2)}{2 \times 3} x^{3} + \ldots$ devam eden

(151) Eğer bir iki terimlinin yükseltileceği kuvvet negatif, terimlerinden biri de negatif olursa kuvvetin sonucunda bulunan işaretlerin tamamı pozitif olur.

Örnek 6: $(1 - x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n\,(n+1)}{2} x^{2} + \frac{n\,(n+1)(n+2)}{2 \times 3} x^{3} + \ldots.$ devam eden

(152) $(x+b)^{n}$ iki terimlisinin yükseltilmesinde genel terimin bulunması:

İlk terim x^{n}

İkinci terim $n\,b^{1}x^{n-1}$

Üçüncü terim $n\,\frac{n-1}{2}\,b^{2}x^{n-2}$

Dördüncü terim $n\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,b^{3}x^{n-3}$

Burada her bir terimin katsayısı $\frac{n}{1}\;\frac{n-2}{2}\;\frac{n-3}{3}$ çarpanlarından oluşup her bir terimde bulunan çarpan sayısı terim sayısından 1 eksilmiş oluduğu görülür.

Bu durumda *r*. teriminin katsayısı:

$\frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r-1)}{1\times 2 \times 3\times\ldots..(r-1)}$ olur.

Aynı şekilde *b* niceliğinin üssü katsayısında bulunan çarpanlardan son çarpanın paydasına eşit ve *x* niceliğinin üssü *n* ile *b* niceliğinin üssü aralarındaki farka eşit olduğundan tam olarak (kâmilen) *r*. terimi;

$\frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+2)}{1\times 2 \times 3\times\ldots..(r-1)}\,b^{r-1}x^{n-r+1}$ olur.

Bu cebir ifadesinde r yerine bir tane varsayılan konulduğunda herhangi bir kuvvetin sonucu yalnız bir istenen terimi bulunmuş olunabilir.

Örnek: $(b^2 - c^2)^{12}$ iki terimlisinin beşinci terimi nedir?

Bu bölümde x=5 ve n=12 olduğundan

$\therefore$ istenen terim = $\frac{12\times11\times10\times9}{1\times2\times3\times4}(-c^2)^4(b^2)^8 = 495b^{16}c^{8}$ dir.

(153) Herhangi kuvvetin sonucunun terimleri sayısını bulmak:

$(x+b)^n$ iki terimlinin $(r$+1). terimi;

$$\frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1\times2\times3\times\ldots..r}\,b^r x^{\,n-r} \text{ olur.}$$

r terimi $n - r + 1$ olarak sıfıra eşit olsa yani n pozitif olup tam sayı olduğu halde $r = n + 1$ olsa r. teriminden başka terim olmayıp terim sayısı da $n + 1$ olarak zikredilen iki terimlinin üssünden bir arttırılmış olur. Ve eğer n negatif ya da kesir olsa çünkü r bir tam sayı pozitif olması lâzım geldiğinden r niceliğinin hiçbir değeri $n - r + 1$ üç terimlisini sıfıra dönüştürmeyip bu sonuçtan terim sayısıda sınırsız olmuş olur. Şöyle ki $(x+b)^3$ ve $(x+b)^7$ iki terimlilerinin kuvvetlerinin sonucu 4 ve 8 terimden ibaret olup halbuki $(x+b)^{-2}$ ya da $(x+b)^{1/2}$ iki terimlilerinin kuvvetlerinin alınmasıyla elde edilen terim sayıları sınırsız ya da fazlasıyla büyük olur.

(154) Yükseltilmiş bir iki terimlinin üssü pozitif tam sayı olursa, kuvveti alınan bu iki terimlinin sonucunun, bu üssün birinci ve sonuncu kuvvetlerine eşit uzaklıkta alınan terimlerin, bu üsler aracılığıyla oluşan katsayıların birbirinin aynı olduğunun ispatı:

Terim sayısı n+1 olduğundan sonuncudan r+1 ilk teriminden n-r+1 terim olduğundan katsayısı (madde 152) bulunan cebir ifadesinde r yerine n-r+1 konulduğunda;

$$\frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-n-1)}{1\times2\times3\times\ldots..(n-r)}$$

$$=\frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(r+1)}{1\times2\times3\times\ldots..(n-r)}$$

$$=\frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\,(n-r)\ldots\ldots(r+1)}{1\times2\times3\times\ldots\ldots r\times(r+1)\ldots\ldots(n-r)}$$

$$=\frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)}{1\times2\times3\times\ldots\ldots\ldots..r} \text{ ilkinden } r\text{+1 terimin katsayısı olur.}$$

Sonuç: Üssü pozitif tam sayı olan bir iki terimlinin yükseltilmesinde kuvvetinin sonucunun yarısı ilkinin yarısından alınabilir.

Örnek: $(b+c)^7$ iki terimlisinin kuvveti istenirse;

Bu bölümde terim sayısı 8 olduğundan yalnız dördüncü terimin katsayısına değin hesap edilmesi lazım gelir.

$\therefore \quad (b+c)^7 = b^7 + 7b^6c + \frac{7\times 6}{1\times 2} b^5c^2 + \frac{7\times 6\times 5}{1\times 2\times 3} b^4c^3 + \ldots$ ve devamı

$= b^7 + 7b^6c + 21b^5c^2 + 35b^4c^3 + 35b^3c^4 + 21b^2c^5 + 7bc^6 + c^7$

(155) $(b+c)^n$ iki terimlisinin kuvveti alındığında en büyük terimi bulmanın yolu ilk olarak elde edilen kuvvetin $(r+1)$. terimi;

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1\times 2\times 3\times\ldots.r} b^{n-r} c^{r}$$

Olur; r. terimi ise;

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+2)}{1\times 2\times 3\times\ldots.(r-1)} b^{n-r+1} c^{r-1}$$ olur.

Bu bu durumda r. teriminden $(r+1)$. terimin bulunması maksadıyla bu $(r+1)$. terimi $\frac{n-r+1}{r}\frac{c}{b}$ niceliğiyle çarpılmış olur.

Bundan dolayı r. teriminin büyüklüğü $(n-r+1) \cdot \frac{c}{b}$ kesrinin 1'den en az olmasına bağlıdır.

Ya da $(n-r+1)\, c < b\, r$

Ya da $r\,(b+c) > (n+1)\, c$

Ya da $r > (n+1)\ \frac{c}{b+c}$

Bu durumda r niceliği $(n+1). \frac{c}{b+c}$ niceliğinden büyük olan baştaki ki tam sayı varsayıldığında bu varsaydığımız terim en büyük terim olur. Eğer $(n+1). \frac{c}{b+c}$ bir tam sayı olmuş olsa kuvvetin sonucunun iki terimi birbirine eşit olur ve bu iki terimden her biri kalan terimlerden en büyüğü olur.

Sonuç bu yolla en büyük terimi tayin etmekle kuvvetin sonucunun terimleri hangi terimden azalmaya başladığı bilinir. Yani kuvveti alınan niceliğin sonucunun hangi noktadan azalmaya başladığı bilinir.

Örnek: $(3+5x)^8$ iki terimlisinde $x=\frac{1}{2}$ olduğu halde kuvveti alındığında hangi terimin büyük olduğunu kesin bilmek istenir ise;

$$(n+1)\frac{c}{b+c}=(8+1)\frac{\frac{5}{2}}{3+\frac{5}{2}}=9\times\frac{5}{11}=\frac{45}{11}=4\frac{1}{11}$$

$4\frac{1}{11}$ kesirle birlikte tam sayıdan en büyük olan başlangıçtaki tam sayı beş olduğundan bu durumda istenen terim beşinci terim olmuş olur.

(156) Herhangi bir kuvvetin sonucunun katsayıları toplamını bulmanın yolu: x niceliğinin her bir değeri için;

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}=x^2+\text{lh olur ise}$$

bu dizide $x=1$ varsayıldığında

$$(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-3)}{2\times3}+\ldots \text{ ve devamı olur.}$$

2^n = katsayıları toplamı

Örnek: $(x+b)^5=x^5+5bx^4+10b^2x^3+10b^3x^2+5b^4x+b^5$olur ve katsayıları toplamı = 1+5+10+10+5+1=32=2^5 olur.

(157) İki terimli (*binom açılımı*) kuralıyla sayıların kökünün yaklaşık değerlerini bulmanın yolu: İlk olarak zikredilen kural ile işlem,

$$\sqrt[n]{1+x}=(1+x)^{1/n}=1+\frac{1}{n}x-\frac{1}{n}\frac{n-1}{2n}x^2+\ldots\ldots\ldots$$

şeklinde olup, q harfiyle n. kuvvetten kökü istenen sayı yazılarak e harfiyle de öyle bir sayı yazıla ki $e^n < q$ $d\,(e+1) > q$ bu sonuçtan $q=e^n+d$ olur. İş bu d sayısı e sayısına oranlan en büyük olur. $\sqrt[n]{q}=e\,(1+d/e^n)^{1/n}$ olduğundan yukarıda yazılı dizide x yerine d/e^n konularak birle $=e\,\{1+\frac{1}{n}(d/e^n)-\frac{1}{n}\frac{n-1}{2n}(d/e^n)^2+\ldots..\}$ dizisi meydana gelip iş bu dizinin yalnız birkaç terimi kökü istenene en yakınındakine eşit olur.

Örnek: 128 sayısnın küpkökün yaklaşık değerinin bulunması:

Bu bölümde $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{5^3+3} = 5\sqrt[3]{1+\frac{3}{125}}$

$= 5\ \{1+\frac{1}{3}\frac{3}{125}-\frac{1}{3}\frac{1}{3}(\frac{3}{125})^2+\frac{1}{9}\frac{5}{9}(\frac{3}{125})^3-\ldots\ldots\ldots\}$

$= 5 + 0{,}04 - 0{,}00032 + 0{,}0000042 - \ldots\ldots = 5{,}0396842$

(158) Bir üç terimlinin mesela $b+c+d$ üç terimlisinin iki terimi, bir terim gibi tanımlanarak iki terimli kuralıyla herhangi bir kuvvete yükseltilebilir.

$(b+c+d)^n = (b+c+d)^n = (b+c)^n + n(b+c)^{n-1}\, d + n\frac{n-1}{2}(b+c)^{n-2}d^2 + \ldots$ devamı

İşbu kuvvetinin alınmasının sonucu da $(b+c)$ iki terimlisinin farklı kuvvetleri tekrar iki terimli kuralıyla bulunarak yerlerine koyma şeklinde istenen elde edilir.

Örnek:$1+x+x^2$ üç terimlisinin küpü istenir ise;

$(1+x+x^2)^3 = (1+x+x^2)^3$
$= (1+x)^3 + 3\,(1+x)^2\,x^2 + 3\,(1+x)\,x^4 + x^6$
$= 1+3x+3x^2+x^3+3x^2+3x^3+3x^4+3x^4+x^5+x^6$
$= 1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$

Aynı şekilde $(b+c+d+e)^n$ dört terimlisinde $b+c$ ile $d+e$ iki terimlileri birer terim olarak tanımlanarak yükselebilir. Bu yöntemle herhangi bir çok terimlinin terimleri ikiye bölünüp, bir iki terimli gibi tanımlanarak herhangi bir kuvvete yükseltilebilir.

2.2.28. Üs Teoremi (Euler Sayısı)

(159) b^x niceliğini birbirini takip eden kuvvetleri x değişkeni (*muhavvil*) aracılığıyla kuvvetinin alınması:

$b^x = \{(1+b-1)^n\}^{x/n}$

$= \{1+n\,(b-1)+\frac{n\,(n-1)}{2}(b-1)^2+\frac{n\,(n-1)(n-2)}{2\times 3}(b-1)^3+\ldots\}^{x/n}$

$= \{1+[(b-1)-(b-1)^2/2+(b-1)^3/3-\ldots]\,n+c'n^2+d'n^3+\ldots\}^{x/n}$

c ve d nicelikleri yalnız b-1 iki terimlisinin kuvvetlerini içine konuldukları halde $= \{1+b'n+c'n^2+d'n^3+\ldots\}^{x/n}$

Ve eğer $b–1 - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \ldots = b'$

$= 1 + \frac{x}{n}(b'n + c'n^2 + \ldots) + \frac{x}{n}\,\frac{\frac{x}{n}-1}{2}(b'n + c'n^2 + \ldots\ldots) + \ldots\ldots$

$= 1 + x\ (b' + c'n\ \ldots\ldots) + x\frac{x-n}{2}(b' + c'n\ \ldots\ldots) + \ldots\ldots$ olur.

Çünkü b^x niceliği n niceliğine bağlı olmadığından n için herhangi bir değer varsayılabilir. Bu sonuçtan n=0 varsayıldığında;

$\therefore\quad b^x = 1 + b'x + b'^2 x^2/1x2 + b'^3x^3/\ 1\times2\times3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

Sonuç: *d* bilinmeyeni *b* bilinmeyeninin öyle bir değerini göstersin ki yukarıda bulunmuş olan kuralda *b* yerine *i* konulduğunda;

b'=1 olsun. Bu durumda

$i^x = 1 + \frac{x}{1} + (x^2/1\times2) + (x^3/1\times2\times3) + \ldots\ldots\ldots$olur. x=1 varsayıldığında

$\text{i} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{1\times2\times3} + \ldots\ldots\ldots = 2{,}71882818$ (*e* sayısı) olur.

2.2.29. Köklü Niceliklerin Karekökünü Alma

(160) Bir irrasyonel terim diğer rasyonel terim olan bir iki terimlinin karekökünü bulmak için her ne kadar 88. maddede bir yol verilmiş ise de burda daha kullanışlı bir metod önerilmiştir.

(161) $b + \sqrt{c}$ durumunda bulunan bir niceliğin karekökü bulunmak istenirse ilk olarak $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{b + \sqrt{c}}$ varsayılıp, karesi alındığında;

$x + y + 2\sqrt{x\,y} = b + \sqrt{c}$

$\therefore\quad x + y = b$ ve $2\sqrt{x\,y} = \sqrt{c}$ olduğundan (Madde 85)

bu iki denklemden *x* ile *y* aşağıdaki gibi elde edilir.

$x^2 + 2\,x\,y + y^2 = b^2$

$4\,x\,y = c$

$\therefore\quad x^2 - 2\,x\,y + y^2 = b^2 - c$

$x - y = \sqrt{b^2 - c}$

ve $x + y = b$

$\therefore \quad 2x = b + \sqrt{b^2 - c}$

ve $2y = b - \sqrt{b^2 - c}$

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 - c}}{2}$$

$$\text{ve } y = \frac{b - \sqrt{b^2 - c}}{2}$$

$$\therefore \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - c}}{2}} + \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - c}}{2}}$$

Burada $b^2 – c^2$ niceliği bir tam kare ise de $b + \sqrt{c}$ niceliğinin karekökü bir iki terimli ile ifade olunabilip zikredilen iki terimlinin terimlerini ya da tek terimi irrasyonel niceliğin karesi olduğu görülür. Aynı şekilde kökü istenen iki terimli $b - \sqrt{c}$ biçiminde olsa $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{b - \sqrt{c}}$ varsayılarak aynen eskisi gibi işlem yapılır. Yukarıda zikrolunan kuralın, biri rasyonel diğer irrasyonel olan iki terimli hakkında geçerli olduğu açıktır. Fakat bir iki terimlinin $\sqrt{d\,b}^{\,2} + \sqrt{c\,d}$ ya da $\sqrt{d}\,(b + \sqrt{c}\,)$ biçiminde değiştirilmesi mümkün ise $b + \sqrt{c}$ iki terimlinin kökü alınır ve kökün elde edilen sonucu, $\sqrt[4]{d}$ niceliğiyle çarpılır.

Örnek: $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ iki terimlinin karekökünün alınması:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}$ varsayılıp

Her iki tarafın karesi alındığında $x + 2\sqrt{x\,y} + y = 3/2 + \sqrt{2}$

$$\therefore \quad x + y = \frac{3}{2}$$

$$2\sqrt{x\,y} = 2$$

$$x^2 + 2\,x\,y + y^2 = \frac{9}{4}$$

$$4\,x\,y = 2$$

$$x^2 - 2\,x\,y + y^2 = \frac{1}{4}$$

$$x - y = \frac{1}{2}$$

$$x + y = \frac{3}{2}$$

$\therefore \quad 2x = 2$ ya da $x = 1$

$2\,y = 1$ ya da $y = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ kökü alınmış olur.

Örnek 2: $\sqrt{27} + \sqrt{24}$ iki terimlinin karekökünün alınması:

Bu örnekte $\sqrt{27} + \sqrt{24} = \sqrt{3 \times 9} + \sqrt{3 \times 8} = \sqrt{3}\,(3 + \sqrt{8}\,)$

$\therefore$ $\sqrt{\sqrt{27} + \sqrt{24}} = \sqrt[4]{3}\,\sqrt{3 + \sqrt{8}}$ olur.

Yukarıda açıklanan yol, buraya tatbik olunarak $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$ bulunarak $1 + \sqrt{2}$ (ya da madde 88 örnek 1)'deki gibi kökü istenen $\sqrt[4]{3}\,(1 + \sqrt{2})$ ya da $\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{12}$ olup istenen elde edilir.

2.2.30. Sınırsız Katsayı

(162) $b+cx+dx^2 + \ldots = b' + c'x + d'x^2 + \ldots$ gibi benzer bir denklemin her iki tarafında bulunan *x* bilinmeyeninin her bir değeri için zikredilen denklem doğru olursa bu bilinmeyenin eşit kuvvetlerinin katsayıları da birbirine eşit olur. Yani $b=b'$ ve $c=c'$ ve $d=d'$ aynı şekilde olurlar. Çünkü bu denklemi *x* bilinmeyeninin her bir değeri için $b + cx + dx^{2} + \ldots = b' + c'x + d'x^{2} + \ldots$ denklemi sağladığından $x=0$ varsayıldığında $b=b'$ olduğu bilinen olup denklemin her iki tarafından bu *b* ve b' eşitleri sadeleştirilirse ve her iki tarafı *x*'e bölündüğünde $c + dx + \ldots = c' + d'x + \ldots\ldots$ olur. Bu denklem, önceki gibi *x* bilinmeyeninin her bir değeri için doğru olduğundan aynı şekilde önceki gibi $x=0$ varsayıldığında $c=c'$ ve aynı şekilde denklemin her iki tarafından *c* ve c' eşitleri çıkarılarak denklemin her iki tarafı *x*'e bölünerek $d+e\,x + \ldots = d' + e'x + \ldots$ olur. Aynı şekilde $x=0$ varsayıldığında $d=d'$ eşitliği de bilinen olup bu şekilde denklemin bir tarafında bulunan kalan terimlerin katsayıları diğer tarafında bulunan kalan terimlerin katsayılarına eşit olduğu ispat olur. Bu teoreme ilişkin uygulamalar aşağıdaki örneklerde görülür.

Örnek: $\frac{b - c\,x}{b + d\,x}$ kesrin dörde bölümünün bulunması sonra bu b' ve c' ve d' ve e' nün katsayı olarak atanması:

$\frac{b - c\,x}{b + d\,x} = b' + c'x + d'x^2 + e'x^3 + \ldots\ldots\ldots$ varsayıldığında

$b - c\,x = b'b + c'bx + d'bx^{2} + e'bx^3 + \ldots\ldots + b'dx + c'dx^2 + d'dx^3 + \ldots.$

$= b'b + (c'b + b'd)\, x + (\, d'b + c'd\,)\, x^2 + (\, e'b + d'd\,) x^3 + \ldots\ldots$

x bilinmeyeninin eşit kuvvetlerinin katsayıları eşitlendiğinde;

$b'b = b$ ya da $b' = 1$

$c'b + b'd = -c \qquad \therefore\ c'b = -(c+d)$ ya da $c' = -\frac{c+d}{b}$

$d'b + b'd = 0 \qquad \therefore\ d'b = \frac{c+d}{b} d$ ya da $d' = \frac{c+d}{b} d$

$e'b + d'd = 0 \qquad \therefore\ e'b = \{-(c+d)/b^2\}.\, d^2$ ya da $e' = \{-(c+d)/\, b^3\}.\, d^3$

bu durumda $\frac{b - c\,x}{b + d\,x} = 1 - \frac{c+d}{b} x + (c+d/b^2)\, dx^2 - (c+d/b^3)\, d^2x^3 + \ldots\ldots\ldots$ olur.

Örnek 2: $\frac{1}{(x+b)\,(x+c)\,(x+d)}$ kesrinin üç farklı kesirle çözümü:

$\frac{1}{(x+b)\,(x+c)\,(x+d)} = \frac{b\prime}{x+b} + \frac{c\prime}{x+c} + \frac{d\prime}{x+d}$ varsayılıp her iki tarafı paydasından kurtarıldığında

$1 = b'(x+c)\,(x+d) + c'(x+b)\,(x+d) + d'(x+b)\,(x+c)$ olur. Bu denklemde x bilinmeyeninin her bir değeri içün doğru olduğu önceden ispat olunan teoremden görüldüğü üzere $x = -b$ varsayılarak

$1 = b'\ \{\,(b-c)\,.\,(b-d)\,\}$ ya da $b' = \frac{1}{(b-c)(b-d)}$

$x = -\,c$ varsayılarak

$1 = -c'\ \{\,(b-c)\,.\,(c-d)\,\}$ ya da $c' = -\frac{1}{(b-c)(c-d)}$

$x = -\,d$ varsayılarak

$1 =\ d'\ \{\,(b-d)\,.\,(c-d)\,\}$ ya da $d' = -\frac{1}{(b-d)(c-d)}$

bu biçimde;

$$\frac{1}{(x+b)\,(x+c)\,(x+d)} = \frac{1}{(b-c)(b-d)(x+b)} - \frac{1}{(b-c)\,(c-d\,)(x+c)} + \frac{1}{(b-d)\,(c-d)(x+d)}$$

olur. Böylece bu yöntemle bir kesrin üç farklı kesir ile çözümü yapılmış olur.

Örnek 3: $y^3 - 3y + x = 0$ olarak x niceliğinin artan kuvvetlerini kapsayan bir dizi vasıtasıyla y niceliğinin değerinin bulunması:

Varsayalım $y = bx + cx^3 + dx^5 + ex^7 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$

Sonra $y^3 = b^3x^3 + 3b^2cx^5 + 3b^2dx^7 + \ldots\ldots = 0$

$-3y = -3bx - 3cx^3 - 3dx^5 - 3ex^7 - \ldots\ldots\ldots = 0$

$x = x \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$ olup x bilinmeyeninin her bir kuvvetinin katsayısı sıfıra eşit kılındığında (Madde 162 sonuç)

$-3b + 1 = 0$ ya da $b = \frac{1}{3}$

$b^3 - 3c = 0$ ya da $c = b^3/3 = 1/3^4$

$2\,b^2c - 3d = 0$ yahud $d = b^2c = 1/3^6 \ldots$ devam eden

$\therefore\; y = \frac{x}{3} + x^3/3^4 + x^5/3^6 + \ldots$ devam eden istenen dizi elde edilir.

2.2.31. Aralıksız Devam Eden Diziler

(163) $\frac{b}{c}$ kesri, aralıksız devam eden kesirler olarak gösterilmek istenirse; c niceliği b niceliğinde q kere mevcut olduğu halde, d niceliği kaldığı varsayılıp ve yine d niceliği c niceliğinde q kere mevcut olduğu halde e niceliği kalan kaldığı varsayılıp ve aynı şekilde bu yolla varsayılarak meydana gelen

$b = q\,c + d$

$c = k\,d + e$

$d = r\,e + v \ldots$ ya da $\frac{b}{c} = q + \frac{d}{c} = q + \frac{d}{k\,d + e}$

$= q + \frac{1}{k + \frac{e}{d}} = q + \frac{1}{k + \frac{e}{r\,e + v}} = q + \frac{1}{k + \frac{1}{r + \frac{v}{e}}}$

yani $\frac{b}{c} = q + \frac{1}{k + \frac{1}{r + \frac{1}{x + \cdots}}}$

Sonuç 1; Herhangi bir kesrin payıyla paydası en büyük olsa bu kesrin değerinin yaklaşık değeri bu şekilde bulunabilir. Yukarıda açıklanan bölme işlemine daha fazla devam edildikçe adı geçen kesrin gerçek değerine daha da yaklaşılmış olur.

Sonuç 2; Yukarıda bulunan kesirlerin yaklaşık değerleri verilen kesrin gerçek değerinden devamlı uzayıp giderek en büyük ve en küçük olur. Nitekim q niceliği $\frac{b}{c}$ kesrinden küçük ve $q + \frac{1}{k}$ tam sayılı kesrinden büyük olup $k + \frac{1}{r}$ niceliği ise payda için çok büyük olduğundan $q + \frac{1}{k + \frac{1}{r}}$ kesri $\frac{b}{c}$ kesrinden küçük olmuş olur.

(Açıklama) $\frac{q}{1}$ ve $\frac{q+1}{k}$ ve $q+\frac{1}{k+\frac{1}{r}}$ niceliklerinden her biri kesrin paydasında döndürüldüğünde bahsedilen kesre, $\frac{b}{c}$ kesrinin **küsür-ü mütebayinesi** (ters kesri) denir.

Örnek 1: 314159 / 100000 kesrine en yakın değer olan bir kesrin en sade halinin bulunmasının yöntemi:

100000,314159 (3

300000

14159,100000 (7

99113

887,14159 (15

877

5289

4435

---

854 887 (1

854

---

33 …..

Bu şekilde $q = 3$ $k = 7$ $r = 15$ $x = 1$ …. olduğundan;

$314159 = 3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\cdots}}$ olur. Birinci yaklaşık 3 olarak bu kesrin gerçek değerinden artan, en azı ve ikincisi $3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$ daha azı ve üçüncüsü $3+\frac{1}{7+\frac{1}{15}}=3+\frac{15}{106}=\frac{333}{106}$ daha azı ve aynı şekilde devam ederek bu bir dairenin çapının çevresine olan oranını ifade eder.

Bu durumda çevre, 3 çaptan büyük ve çapın $\frac{22}{7}$ sinden daha küçük, $\frac{333}{106}$ çapından büyüktür. Böyle devam eder.

Örnek 2: $\frac{84}{227}$ kesrine son nokta olan aralıksız devam eden dizinin elde edilmesi:

$\frac{84}{227} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\frac{1}{2}}}}}}}$ işleminin bölümleri 2 ve1, 2 ve 2, 1 ve 3, ve 2 olduğundan, istenilen kesir $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{3}$ ve $\frac{3}{7}$ ve $\frac{7}{19}$ ve $\frac{10}{27}$ ve $\frac{37}{100}$ ve $\frac{84}{227}$ olur.

(164) $\sqrt{b^2+1}$ kökünü aralıksız devam eden kesrin payı olarak göstermenin yöntemi:

$$\sqrt{b^2+1} = b + \sqrt{b^2+1} - b$$

$$= b + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}+b}$$

$$= b + \frac{1}{b+b+\sqrt{b^2+1}-\mathrm{b}}$$

$$= b + \cfrac{1}{2\,b + \cfrac{1}{2\,b + \cfrac{1}{2\,b + \cdots \ldots}}}$$

Örnek 3: $\sqrt{17} = \sqrt{4^2+1}$

$$= 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cdots.}}}$$

Sonlu kesirlere $\frac{4}{1}$, $4+\frac{1}{8}$, 4 ve $\frac{1}{8+\frac{1}{8}}$ …. ya da $\frac{4}{1}$, $\frac{33}{8}$, $\frac{264}{65}$ …. olur. Bu kesirlerden her biri $\sqrt{17}$ gerçek değerine ve onu sağlayan kesirlerden daha yakın olur.

(165) $\sqrt{11}$ kökünü aralıksız devam eden kesirler şeklinde ifade edilmesi ve bu kesirlerin bulunması:

$$\sqrt{11} = 3 + \sqrt{11} - 3 = 3 + \frac{2}{\sqrt{11}+3} = 3 + \frac{1}{\frac{\sqrt{11}+3}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{11}+3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{11}-3}{2} = 3 + \frac{2}{2\,(\sqrt{11}+3)} = 3 + \frac{1}{3+\sqrt{11}}$$

$$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\sqrt{11}}} = 3 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+3+\cfrac{1}{3+\cdots}}}}} = 3 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cdots}}}}}$$

Bölümler 3, 3, 6, 3, 6 ve …. ve kesirler $\frac{3}{1}$ ve $\frac{10}{3}$ ve $\frac{63}{19}$ ve $\frac{193}{60}$ ve $\frac{1257}{379}$ ve … olur.

2.2.32. Logaritma

(166) Eğer $n=b^x$ ise bu denklemde bulunan x niceliği n niceliğinin b tabanına göre logaritmasıdır. Ya da verilen bir tabana göre bir sayının logaritması, tabanın öyle bir kuvvetidir ki taban bu kuvvete yükseltildiğinde zikredilen sayıya eşit olur. Eğer bir logaritma kuralı genel tabanın her bir değeri için doğru olsa kuralda bulunan logaritmalar bu yolla log m log n yazılır. Eğer bu kuralda bulunan logaritmalar yalnız tabanın bir özel değeri için doğru olmuş olsa -varsayalım b=10- bu durumda $\log_{10} m$ $\log_{10} n$ ya da bu yolla $l_{10}\, m$ $l_{10}\, n$ şeklinde yazılır. Eğer $n=b^x$ denkleminde b niceliği aynı kalarak n niceliğine farklı değerler verilerek x niceliğine karşılık değerleri bir yere yazılsa bu şekilde oluşturulan cetvele b tabanına göre logaritma cetvelleri denir. 10 tabanına göre hesaplanan logaritmalarda, özel kuralları olup ve genel logaritma cetvelleri de bu tabana göre hesaplanmış olduğu aşağıda verilecek maddelerde görülecektir.

(167) Çünkü $n=b^x$ ise $x=\log_b n$ olur bu durumda $n=b^x= \log_b n$ olur.

Sonuç 1: Eğer x=1 olsa $n=b$ olduğundan, bu durumda $\log_b b=1$ olur.

Eğer x=0 olsa b^x ya da n 1 olur. Bu sonuçtan log1=0 olmuş olur.

Sonuç 2: Herhangi bir logaritmanın tabanı b olursa;

$m=b^{\log_b m}$ $n=b^{\log_b n}$ $\therefore$ $b=m^{1/\log_b m}$ $b=n^{1/\log_b n}$

$\therefore$ $m^{1/\log_b m} = n^{1/\log_b n}$ $m^{\log_b n} = n^{\log_b m}$

b niceliklerinin her bir değeri için bir doğru sonuç olması sebebiyle $m^{\log n} = n^{\log m}$ olur.

(168) Verilen herhangi bir i tabanına göre hesaplanmış logaritma cetvellerinden b tabanlı logaritma cetvellerinin oluşturulması:

Önceki madde ile $n = i^{\log n}$ $n = 10^{\log_{10} n}$ $10 = i^{\log 10}$ olur.

Bu sebepten $i^{\log n} = (10)^{\log_{10} n} = (i^{\log 10})^{\log_{10} n} = i^{\log 10} \times {}^{\log_{10} n}$ olarak i niceliğinin üsleri eşitlendiğinde $i^{\log n} = i^{\log} 10 \times 10^{\log n}$ ve $10^{\log n} = 1/\, i^{\log} 10 \times i^{\log n}$ olur.

Bu durumda herhangi bir sayının 10 ve i gibi farklı iki tabana göre hesaplanmış logaritmaları, taban değiştirme kuralı ile $1/\log_i 10$ daimi çarpanı aracılığıyla birleşmiş olur. Buradan i tabanına göre hesaplanmış logaritma cetvellerinden 10 tabanına göre logaritma cetvelleri oluşturulabilir. Diğer taraftan tabanda 10 yerine b harfi yazıldığında $b\, n = 1 /\log_i b \times \log_i n$ meydana gelir. Bir sayının tabanları b ve i olarak iki tarz üzere bulunan logaritmalarını birbiriyle birleşmesi için değiştiren $1 /\log_i b$ olmuş olur.

(169) Çok sayıda çarpanların çarpım sonuçlarının logaritması bu çarpanların logaritmaları toplamına eşittir.

Zirâ $m \times n \times r \ldots\ldots = b^{\log_b m} \times b^{\log_b n} \times b^{\log_b r} \ldots\ldots = b^{(\log_b m + \log_b n + \log_b r \ldots)}$

lakin $m \times n \times r \ldots\ldots = b^{\log b(m \times n \times r \ldots)}$ olduğundan

$\log_b (m \times n \times r \ldots) = \log_b m + \log_b n + \log_b r \ldots\ldots$

ya da $(m \times n \times r \ldots\ldots) = l_{10}\, m + l_{10}\, n + l_{10}\, r + \ldots\ldots$

Bu durumda logaritma cetvellerinde bu çarpanların logaritmaları toplamına eşit bulunan logaritmanın sayısı bu çarpanların çarpım sonucu olmuş olur.

(170) Bölenin logaritması bölünenin logaritması ile bölenin logaritması arasındaki farka eşittir.

Çünkü $b^{\log_b (m/n)} = \frac{m}{n} = b^{\log_b m} / b^{\log_b n} = b^{\log_b m - \log_b n}$

$\therefore$ $\log_b (\frac{m}{n}) = \log_b m - \log_b n$ ya da $l_{10}\, (\frac{m}{n}) = l_{10}\, m - l_{10}\, n$

Bu durumda eğer logaritma cetvellerinde bölünen ile bölenin logaritmaları arasındaki farka eşit bulunan logaritmanın sayısı bu bölme işleminin sonucuna bölüme eşit olur.

(171) Herhangi bir sayının q kuvvete yükseltilmesinin logaritması, gerek tam sayı gerek kesir olsun o sayının logaritmasının q katına eşittir.

Çünkü; $b^{\log_b (m)^q} = m^q = (b^{\log_b m})^q = b^{q \log_b m}$

$\therefore$ $\log_b (m^q) = q \log_b m$ ya da $\boldsymbol{l} (m^q) = q\, \boldsymbol{l}\, m$

aynı şekilde $b^{\log_b (m)^{1/q}} = m^{1/q} = (b^{\log_b m})^{1/q} = b^{1/q \log_b m}$

$\therefore$ $\log_b (m^{1/q}) = \frac{1}{q} \log_b m$ ya da $\boldsymbol{l} (m^{1/q}) = \frac{1}{q}\, \boldsymbol{l}\, m$ olur.

Buradan, verilen herhangi bir sayının q kuvveti, logaritma cetvellerinde yer alan sayının logaritmasının q katı olduğu görülür. Yine bu sayının q kuvvetinden kökü, logaritma cetvellerinde verilen sayının logaritmasının $\frac{1}{q}$ katıdır.

Sonuç: Yukarıdaki üçüncü maddede olduğu gibi çarpma, bölme, kuvvet ve karekök alma işlemlerinin özellikle çok sayı hakkında logaritma cetvelleri aracılığıyla nasıl yapıldıkları basit hesap kurallarından daha kolaydır. Fakat daha kolay olan toplama ve çıkarma işlemlerinin logaritma cetvelleri aracılığıyla yapılmaları mümkün olmadığından hesap yapmaya ihtiyaç vardır.

(172) Basit ya da Henri Briggs adlı yazarın *Briggsian* yöntemiyle hesaplanmış logaritmalarda yani tabanı 10 olan logaritmalarda n sayısının logaritması bilinse, bu logaritmadan $10^m \times n$ ve $n/10^m$ sayılarının logaritmaları belirlenebilir.

Çünkü; $\log_{10} (10^m \times n) = \log_{10} 10^m + \log_{10} n$ (madde 169)

$= m \log_{10} 10 + \log_{10} n$ (madde 171)

$= m + \log_{10} n$ (madde 167 sonuç 1)

ve $\log_{10} (n / 10^m) = \log_{10} n - \log_{10} 10^m$

$= \log_{10} n - m$

logaritma cetvellerinden alınarak;

$\log_{10} 6 = 0{,}7781513$

$\therefore$ $\log_{10} 60 = \log_{10} 10 + \log_{10} 6 = 1 + 0{,}7781513 = 1{,}7781513$

$\log_{10} 600 = \log_{10} (10)^2 + \log_{10} 6 = 2 + 0{,}7781513 = 2{,}7781513$

$\log_{10} 0{,}6 = \log_{10} 6 - \log_{10} 10 = 0{,}7781513 - 1$

$\log_{10} 0{,}006 = \log_{10} 6 - \log_{10} (10)^3 = 0{,}7781513 - 3$

Yukarıda yazılmış logaritmaların diğeri ikisini bu yolla

1,7781513 ve 3,7781513 bulunur.

Açıklama

Bir sayının logaritmasının tam sayı olan kısmına o sayının logaritmasının karakteristiği **meş'arı ya da merfu'ı** denilir. Kesirden ibaret olan kısmına o sayının logaritmasının ***mantisi(kesri)*** denir.

Nitekim $\log_{10} 600 = 2{,}7781513$ logaritmasında 2 sayısına 600 sayısının *karakteristiği* denilir, 0,7781513 kesrine de 6 sayısının logaritmasının *mantisi* denilir.

(173) Basit logaritmada verilen herhangi bir sayının logaritmasının kuvvetini tayin etmenin yöntemi: Eğer bir sayı 1 ile 10 arasında ise logaritması 0 ile 1 arasında, kuvveti (***merfu'ı)***0 olur.

Aynı şekilde 10 ile 100 1 ile 2 1 olur.

Aynı şekilde 100 ile 1000 2 ile 3 2 olur.

Ve yine $10^{n\text{-}1}$ ile 10^{n} n–1 ile n n–1 olur.

Bu sonuçtan $10^{n\text{-}1}$ ile 10^{n} sayılarının aralarında var olan sayı yani n adet hane rakamdan ibaret olan sayının logaritmasının kuvveti n-1 ya da zikredilen sayıyı kapsadığı sayı rakamın hanesinden 1 eksik olur. Eğer zikredilen sayı 1 ile $\frac{1}{10}$ arasında ise logaritması 0 ile -1 arasında olup, kuvveti 1dir.

Aynı şekilde $\frac{1}{10}$ile $\frac{1}{100}$ __________ –1 ile –2 __________ 2^{-} olur.

Aynı şekilde $1/\ 10^{n\text{-}1}$ ile $1/\ 10^{n}$ _________ – (n–1) ile – n ________ n^{-} olur.

Bu durumda varsayılan işaretlerden sonra n-1 tane sıfırı kapsayan bir ondalık kesrin logaritmasının karakteristiği n olur. Genel herhangi bir sayının logaritmasının karakteristiği o sayıda bulunan sayının rakam hanesinden bir eksik olup, eğer bu sayı bir ondalık kesir ise logaritmasının varsayılan karakteristiğinin işaretini sağlayan sayı sıfıra eşit olur, fakat işaretleri negatif olur.

Aksine verilen birtakım logaritmaların karakteristikleri 1, 2, 3….. $1^{/}$ ve $2^{/}$ ve $3^{/}$ olmuş olsa bu logaritmaların tam sayı olan kısımları 2 ve 3 ve 4……………. ve 0, -1, -2…. rakamların haneleri ibaret olur. Örnek olarak 254 ile 25400 sayılarının logaritmalarının rakam hanelerinden ibaret olur. Şöyle ki, 254 ile 25400 sayılarının logaritmalarının karakterisitiği 2 ile 4 olup 2,54 ve 25,4 ve 254 …….. 0, sayılarının logaritmalarının karakteristiği 0, 1 ve 4^- olur. Nitekim logaritma cetvellerinde 3652 sayısının logaritmasının mantisi(ondalık kısmı) 0,5625308 olduğundan;

$\therefore \log_{10} 3652 = 3{,}5625308$

$\log_{10} 36{,}52 = 1{,}56253080$

$\log_{10} 365200 = 5{,}5625308$

$\log_{10} 0{,}3652 = 1^{/}{,}5625308$

$\log_{10} 0{,}003652 = 3^{/}{,}5625308$

(174) Henri Briggs'in *Briggsian* yöntemi üzere hesaplanmış olan logaritmalarının özel faydaları: Önceki maddede görüldüğü üzere eğer bir logaritmanın tabanı 10 ise logaritma cetvellerine bu sayıları logaritmalarının yalnız kesirlerin alınması lazım gelir. Logaritması istenen sayının rakamının hanesinin sayısı sayılarak karakteristiği belirlenebilir. Bu sebepten karakteristiğin bırakılması kolay logaritma cetvellerinin diğer kuralları üzerine hesaplanmış cetvellerden daha işlemlerle yapılmasına yol açar. Aynı şekilde (madde 172) görüldüğü üzere bu tarz logaritmalarda n adetin logaritmasının mantisi m herhangi bir tam sayı olduğu kabul edilerek $(10)^n \times n$ ve $n\ /10\ ^m$ sayılarının logaritmalarının mantisleri olur. Bu durum basit cetvelleri diğer tabanlarla hesaplanmış cetvelden daha kısaltılmış kılar. Zira diğer tabanlara göre hesaplanmış cetvelde n adetin logaritmasının $10^m n$ ve $n/10^m$ adetlerin logaritmaları mantislerinin aynısı olamaz.

(175) Yukarıda ispatlanan (169) ve (170) ve (171) maddelere ilişkin verilecek örnekler yardımıyla daha iyi açıklanabilir.

Örnekler:

<u>Birinci örnek;</u> 23 sayısının 16 sayısı ile çarpımı: Logaritma cetvellerinden 23 sayısının logaritmasının mantisi 0,3617278;

16 sayısının logaritmasının mantisi 0,2041200

$\therefore \log_{10} 23 = 1,\ 3617278$

$\log_{10} 16 = \frac{1,2041200}{2,5657478}$

aynı şekilde logaritma cetvellerinden 0,5658478 logaritma mantisi 368 olduğundan;

$\therefore \log_{10} 3680$ ya da $\log_{10} 368 = 3,5658478$ olur. 368 çarpım sonucu elde edilmiş olur.

<u>İkinci örnek;</u> 0,0172 sayısı ile 0,00241 sayısının çarpımı.

$\log_{10} 0,0172 = \bar{2},2355284$

$\log_{10} 0,00241 = \frac{\bar{3},3304138}{\bar{5},5659422} = \log_{10} 0,000036808$

<u>Üçüncü örnek;</u> 3672 sayısının 51000 sayısına bölümü:

$\log_{10} 3672 = 3,5649027$

$\log_{10}\ 51000 \equiv \frac{4,7075702}{\bar{2},8573325}$ 'in logaritma mantisi 72 sayısının logaritması mantisine mutabık olduğu için

$\therefore \bar{2},8573325 = \log_{10} 0,072$ olup 0,072 sayısı istenen bölme işleminin sonucu bölüm olur.

<u>Dördüncü örnek;</u> $(15,4)^3$ ve $(650)^{1/5}$ sayılarının değerlerinin bulunması istenendir.

$\log_{10} 15,4 = 1,1875207$

$\frac{3}{3,5625621} = \log_{10} 3652,3$ yaklaşık olarak

$\therefore$ 15,4 sayısı 3652,3 sayısının küpkökünün yaklaşık değeri olmuş olur.

Ve yine $\log_{10} 650 = 2,8139134$

$\therefore \frac{1}{5} \log_{10} 650 = 0,5625826 = \log_{10} 3,6524$ yaklaşık olarak

$\therefore$ 3,6524 sayısı 650 sayısının beşinci kuvvetten kökünün yaklaşık değeri olur.

<u>Beşinci örnek;</u> $(0,085)^4$ ve $(0,000065)^{1/3}$ sayılarının değerlerinin bulunması:

$\bar{2},9294189 = \log_{10} 0,085$

$\frac{4}{5,7176756}$ işbu logaritma mantisi 522006 sayısının logaritma mantisinin en yakın eşiti olduğundan istenen sayının birincisi yaklaşık olarak

0,0000522006 olur.

yine $\log_{10} 0{,}000065 = 5{,}81291\bar{3}4$

$= 1{,}8129134 + \bar{6}$

$\therefore \frac{5{,}812913\bar{4}}{2{,}604304\bar{4}\bar{4}} = \log_{10} 0{,}040207$ yaklaşık değeri olur.

2.2.33. Logaritma Cetvellerinin Yapım Yöntemi

(176) x niceliğinin gittikçe artan kuvvetleri aracılığıyla $\log_b (1+ x)$ logaritmasının *tevsi'ı(genişletilmesi)* istenirse $b^/= 1$ ya da $\log_b 1 = 0$ olduğundan $\log_b (1+ x)$ logaritmasında x yok olduğunda $\log_b (1+ x) = \log_b 1$ olur. Bu durumda $\log_b (1+ x)$ logaritmasının değerini ifade eden dizi x bilinmeyeninin negatif kuvvetlerini kapsamaz. Çünkü x yok edildiğinde dizi sonuz olur. Bu dizide değiştirilmemiş terimde bulunamaz. Bu yüzden bu terimi x niceliğiyle beraber değitirmiş olmamak gerekir. Bu sebepten $m\ x + c\ x^2 + d\ x^3 + \ldots\ldots = \log_b (1+ x)$ varsayılsa bu dizinin her iki tarafında da x yerine $x+e$ yazıldığında;

$m (x + e) + c (x + e)^2 + d (x + e)^3 + \ldots\ldots \log_b (1+\overline{x + e})$ olup ilk dizi ikinci diziden çıkarıldığında; $m \{ (x + e) – x \} + c \{ (x + e)^2 – x^2\} + d \{ (x + e)^3 – x^3\}+ \ldots$ ya da

$m\, e + c\, (2\, x\, e + e^2) + d\, (3\, x^3\, e + 3\, x\, e^2 + e^3) + \ldots = \log_b (1+\overline{x + e}) – \log_b (1+ x)$

$= \log_b \frac{1+\overline{x+e}}{1+x}$ olduğundan (madde 170) ile

$= \log_b (1+ \frac{e}{x+1}) = m (\frac{e}{x+1})+ c (\frac{e}{x+1})^2 + e (\frac{e}{x+1})^3 +\ldots\ldots$

Önceki varsayımımızdan lazım gelip iş bu denklemin her iki tarafı e'ye bölündüğünde;

$m + c (2\, x + e) + d (3\, x^3 + 3\, x\, e + e^2) + \ldots.. = \frac{\mathrm{m}}{x+1} +c\ \{e / (x + 1)^2\} +\ldots$ olur.

$e = 0$ varsayıldığında $m + 2\, c\, x + 3\, d\, x^2+ \ldots\ldots = \frac{\mathrm{m}}{x+1} = m\ (1 – x + x^2 – x^3 + \ldots)$

x niceliğinin eşit kuvvetlerinin katsayıları eşit kılındığında

$2\, c = – m \quad 3d = m \quad 4e = – m$ ….. ve devamı

$\therefore\ c = – \frac{1}{2} m \qquad d = \frac{1}{3} m \qquad e = – \frac{1}{4} m$ …… ve devamı

$\therefore\ \log_b (1+ x) = m\ \{ x – (x^2/2) + (x^3/3) – (x^4/4) + (x^5/5) – \ldots..\}$

logaritma kuralı elde edilir.

Sonuç 1; Çünkü yukarıda yazılmış *m* niceliği değitirilmemiş olduğundan b niceliğinin değerine bağlı olmakla *i* öyle bir nicelik varsayılsın ki $i^{1/m}=b$ olsun.

$\therefore\ \frac{1}{m} = \log_i b$ ve $\log_i (1+x) = (1/\log_i b)\{x-(x^2/2)+(x^3/3)-\ldots\}$ (2) olup logaritma kuralı *i* varsayıldığında $\log_i (1+x) = x-(x^2/2)+(x^3/3)-\ldots$ (3)

İş bu ***i*** niceliğinin değeri değiştirilmemesi 2,7182818 olarak gelecekte bulunmuş olsa gerektir.

Şimdi iş bu ***i*** kuralına göre hesaplanmış logaritmalara **Napier logaritmaları** denir. Logaritmanın mucidi olan Napier'nin ismiyle ünlenmiş olmasına rağmen kendisi bu kaideyi diğerine (*Briggsian*) tercih etmiştir. Çünkü zikredilen kurala göre logaritmaların hesabı diğer kurala göre logaritmaların hesaplarından daha kolaydır. Nitekim bu durum önceki (2) ve (3) rakamlarıyla ifade olunan dizilerin birbirleriyle kıyas olunarak açıkça görülür.

Sonuç 2; $\log_i b = \log_i \{1+(b-1)\}$ olup bu da dizi (3) ile

$=(b-1)-\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{1}{3}(b-1)^3-\ldots\ldots$ (4)

Sonuç 3; $m = 1/\log_i b = (b-1)-\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{1}{3}(b-1)^3-\ldots\ldots$

Sonuç 4; Adi logaritmaların değiştireni olan $1/\log_i 10$ kesrinin değeri aşağıda ispat olunacak(8) rakamıyla ifade olunan kural gereğince aşağıdaki gibi hesaplanır.

Kural (8) ile $\log_i 5 = \log_i 4 + 2\ \{\frac{1}{8+1}+\frac{1}{3}(\frac{1}{(8+1)})^3+\frac{1}{5}(\frac{1}{(8+1)})^5+\ldots\}$

$= 2\log_i 2 + 2\ \{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\,1/9^3+\frac{1}{5}\,1/9^5+\ldots\ldots\}$

$\therefore\ \log_i 10 = \log_i 2 + \log_i 5 = 3\log_i 2 + 2\ \{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\,1/9^3+\frac{1}{5}\,1/9^5+\ldots\ldots\}$

$= 6\ \{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,1/3^2+\frac{1}{5}\,1/3^5+\ldots\ldots\}$ kural (8) ile

$+2\ (\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\,1/9^3+\frac{1}{5}\,1/9^5+\ldots\ldots)$

$\log_i 10 = 2\ (1+\frac{1}{3}.\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\,1/9^2+\ldots$

$+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}.1/9^3+\frac{1}{5}.1/9^5+\ldots\ldots)$

$= 2{,}30257509\ldots$

Bu sonuçtan $1/\log_i 10 = 0{,}434294819$ olup değiştiren diye tabir olunan kesrin değeri bu yolla bulunmuş olur.

(177) Logaritmaların hesabı için bazı kurallar **seriu'l mütekaribe** (*yakınsak seri*) bulunması kural (3);

$= \log_i \frac{1}{x} = \log_i (1- \frac{x-1}{x}) = - \frac{x-1}{x} - \frac{1}{2} (\frac{x-1}{x})^2 \ldots\ldots$

Lakin $\log_i \frac{1}{x} = \log_i 1 - \log_i x = - \log_i x$

$\therefore \log_i x = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2} (x - 1/x)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$

Ve yine $\log_i (1+z) = z - (z^2/2) + (z^3/3) - \ldots\ldots\ldots.$

$\log_i (1-z) = - z - (z^2/2) - (z^3/3) - \ldots\ldots\ldots$

$\therefore \log_i (1 + z) - \log_i (1 - z)$ ya da $\log_i \frac{1+z}{1-z}$

$= 2 \{ z + z^3/3 + z^5/5 + \ldots\ldots\ldots. \}$

Ve eğer $\frac{1+z}{1-z} = x$ olsa bu durumda $z = \frac{x-1}{x+1}$ olduğundan kuralda yerine konulduğunda;

$\log_i x = 2 \{ \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} (\frac{x-1}{x+1})^3 + \frac{1}{5} (\frac{x-1}{x+1})^5 + \ldots.. \} \ldots.(6)$

Eğer işbu dizide x 1'den parçası büyük olsa zikredilen **serian mütekarib** (*yakınsak seri*) olur.

(178) z niceliği x niceliğine bakarak küçük olarak verilen $\log_i x$ logaritmasından $\log_i (x+z)$ logaritmasının bulunması:

$\log_i (x+z) = \log_i \{ x (1+ \frac{z}{x}) \}. = \log_i x + \log_i (1+ \frac{z}{x})$ olup $\frac{(1+ \frac{z}{x})-1}{(1+ \frac{z}{x})+1} = \frac{z}{2x + z}$

olduğundan kural(6) ile $\log_i (1+ \frac{z}{x})$ logaritması genişletilerek;

$\log_i (x+z) = \log_i x + 2 \{ \frac{z}{2x+z} + \frac{1}{3} (\frac{z}{2x+z})^3 + \ldots.. \} \ldots..(7)$ olup böylece istenen kural elde edilmiş olur.

Sonuç; Eğer $z = 1$ olsa $\log_i (x+1) = \log_i x + 2 \{ \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3} (\frac{1}{2x+1})^3 + \ldots.. \} \ldots..(8)$ dizisi meydana gelirp x niceliği büyük olduğu halde $\log_i x$ logaritmasından $\log_i (1+x)$ logaritmasının hesabına gerekli bir genel kural olmuş olur.

(179) x ve x-1 birbiri ardına gelen iki sayının verilen Napier logaritmalarından zikredilen iki sayıyı oluşturan sayının logaritmasının bulunması istenendir.

$\log_i (x + 1) = \log_i (x^2–1) / (x –1) = \log_i \{x^2 (1– 1/x^2) / (x–1)\}$

$= 2 \log_i x – \log_i (x – 1) + \log_i (1– 1/ x^2)$ olup

$\log_i (1 – 1/ x^2)$ logaritması kural (6) ile genişletilerek

çünkü $\{ (1– 1/ x^2) – 1/ (1+ 1/ x^2) + 1\} =1/ (2 x^2– 1)$ olduğundan

$\log_i (x + 1) = 2 \log_i x – \log_i (x – 1) – 2 \{ 1/ (2 x^2– 1) + \frac{1}{2} (2 x^2– 1) +….) …(9)$ istenen kural elde edilmiş olmuş olur.

2.2.34. Adi Logaritma Cetvellerinin Yapımı

(180) Önceki elde edilerek (5) ve (6) ve (7) rakamlarıyla ifade olunan diziler vasıtasıyla sagir (küçük) olan asıl sayıların Napier logaritmaları bulunmuş olunup sonra asıldan olmayan asıl büyük sayılarda (*adâd-i kebire-i asliyede*) bulunan çarpanlarına çözümlenerek bu çarpanların logaritmalarından zikredilen sayının logaritmaları elde edilebilir. Şöyle ki; $\log_i 288 = \log_i 2^5 \times 3^2 = \log_i 2^5 + \log_i 3^2 = 5 \log_i 2 + 2 \log_i 3$ ve (8) ve (9) ifadeleri aslından olmayan *aded-i kebirenin* (*büyük sayıların*) logaritmalarının bulunmasını fazlasıyla kolaylaştırır.

İşte bu sebeple Napier logaritmaları bulunduktan sonra her birilerinin değeri 0,34294819 kesri yazılan $1/\log_i 10$ kesriyle çarpıldığında tabanı 10 olan cetveller de meydana gelmiş olur.

2.2.35. Logaritma Cetvellerinde Logaritması Olmayan Sayıların Logaritmalarını ve Verilen Herhangi Bir Logaritmanın Sayısını Bulma

(181) Varsayalım altı hane rakamdan ibaret olan herhangi bir *tam sayılı kesir* (*adet-i sahîh mea'l-kesr*) $n + \frac{b}{10}$ ile ve logaritması kesri m ile yazılıp n ve $n+1$ ifadeleriyle de beş hane rakamdan ibaret olan birbiri ardınca giden her iki sayının ve m_1 ve m_2 ile logaritmaları ifade olunarak çünkü n ve $n + \frac{b}{10}$ sayılarının tam olan kısımları birbirine eşit olduğundan logaritmalarının kuvvetleri birbirinin aynı olduğundan; $\therefore m – m_1 = \log_{10} (n +\frac{b}{10}) – \log_{10} n =\log_{10} \frac{n+\frac{b}{10}}{n}$ (madde 170) ile $= \log_{10}$

$(\frac{1+b}{10n})$ olup iş bu denklemde bulunan $\log_{10}(\frac{1+b}{10n})$ kural (2) ile genişletilip ilk terime kıyasen *hudûd-u mütevâliye-i bakıye* (birbirine ardınca giden terimlerinden kalan) küçük olduğundan terk edildiğinde elde edilen genişletilmişi yaklaşık olarak $1/\log_{i}10 \cdot \frac{b}{10n}$ olmuş olur.

Ve bunun gibi açıklanır ki;

$m_2 - m_1 = \log_{10}(n+1) - \log_{10} n = 1/\log_{i}10 \cdot \frac{1}{n}$

$\therefore \quad m - m_1 = (m_2 - m_1) \cdot \frac{b}{10}$

Bu durumda eğer m_1 ve m_2 ve b nicelikleri bilinse, bu çıkarılan kuraldan m niceliği elde edilip ya da m ve m_1 ve m_2 nicelikleri biliniyorsa b niceliği de tanımlanmış olur.

Örnek 1; Logaritması 3,5677766 olan sayıyı yukarıda bulunmuş olan genel kural aracılığıyla elde etmek istense, bu verilen logartima mantisi cetvelden yazıyla $\log_{10}$ 36942 logaritmaya çok uygun olmakla beraber yazılan logaritma mantisi $i = m =$ 0,5677766 'e uygun logaritma kesri $i = \frac{m1 = 0{,}5677672}{m - m\,1 = 94}$ olur.

Ve aynı şekilde $\log_{10} 36963 = m_2 = 0{,}5677789$

$\log_{10} 36963 = \frac{m1 = 0{,}5677672}{m2 - m\,1 = 117}$ olur.

Bu eşitler zikredilen kuralda yerlerine koyulduğunda;

$94 = 117 \times \frac{b}{10}$ denklemi meydana gelir. Bu denklemden b bulunduğunda b=8 olduğundan 369638 sayısı elde edilir. Verilen logaritmanın kuvveti(karakteristiği) 3 olduğundan istenen sayısı da 3696,38 olmuş olur.

Örnek 2; Sayısı 367,654 olan logaritmanın bulunması:

Logaritma cetvellerinden $\log_{10}$ 367650 =2, 5654346 olup farkı da 118 olduğundan önceki bulunan kuralda eşitler yerlerine koyularak;

$m = m_1 + (m_2 - m_1) \cdot \frac{b}{10} = 2{,}\ 5654346 + 118 \times \frac{4}{10}$

= 2, 5654346 + 47 = 2, 5654393 ve bu durumda $\log_{10}$ 367,654 = 2,5654393 olur.

2.2.36. Basit Faiz ve Bileşik Faiz

(182) (Tanım): Faiz bir kimseye bir diğerinin sahip olduğu paranın kullanılması için borç verilen paraya denilir. Bu paradan bir miktarının belirli bir süre kullanılması için verilen paraya bu paranın faizi denir. Nitekim bir mecidiyenin(gümüş para) bir sene zarfında kullanılması gibi. Ne zaman ki ana paranın **re'sü'l-mal**'ın faizi yalnız alındığında bu tür faize **faiz-i müfred** (*basit faiz*) denir. Eğer yukarıda söylenen faizin vade sonunda ana para artarak iş bu toplamın üzerine faiz tahsis olunur ise bu tür faize de **faiz-i mürekkeb** (*bileşik faiz*) denir. Gerek basit faiz ve gerekse bileşik faizde zamanın sonunda elde edilen faiz ile ana para toplamına ulaşır.

2.2.37. Basit Faiz

(183) Verilen bir miktar paranın herhangi süre zarfında basit faiz üzere tutulmasının bulunması:

Örnek: Ana para (*re'sü'l-mâl*) olan gümüş para sayısı *q* harfiyle ve faizi istenmiş olan sayısı *n* harfiyle ve bir gümüş paranın bir sene zarfında olan faizi *r* harfiyle yazılıp *m* harfiyle de bulunması istenen meblağ ifade olunsa; verilen herhangi bir toplamın belirli bir şekilde olan faizi süresiyle uygun olduğundan 1 (sene) : *n* (sene) : :r : $n\ r$ olup işbu $n\ r$ miktarı bir mecidiyenin *n* sene sonunda faizi bir mecidiyenin faizinin *q* katı olduğundan $q\ n\ r$ olarak bu durumda meblağ yani istenen $m = q + q\ n\ r$ olmuş olur.

(184) İş bu birinci dereceden denklemde bulunan *q* ve *n* ve *r* ve *m* dört niceliğin herhangi üçü bilinse dördüncü bulunabilir.

$$q = \frac{m}{1+nr} \qquad n = \frac{m-q}{qr} \qquad r = \frac{m-q}{qr}$$

Örnek; Ne miktar akçe ödünç alınsa, yüzde beş faiz ile dokuz ay sonunda 600 mecidiyeye ulaşmış olur. Yani ne miktar ana para senelik yüzde beş faiz ile dokuz ay sonunda 600 mecidiyeye ulaşmış olur.

Bu bölümde m=600 n=$\frac{3}{4}$ =0,75 r=$\frac{5}{100}$ =0,05 olup bu durumda

$$q = \frac{m}{1+nr} = \frac{600}{1+0,75 \times 0,05}$$

578,313 mecidiyeye = 578 mecidiye 31 kuruş 12 para olup istenen elde edilir.

2.2.38. Bileşik Faiz

(185) Verilen bir miktar akçenin herhangi süre zarfında bileşik faiz üzere tutulmasının bulunması istense r= bir mecidiye ile bir mecidiyenin bir sene süresinde olan faizine eşit varsayıldığında r bir senenin sonunda *re'sü'l-mâl* (ana para) olduğundan ikinci sene sonunda ulaşılan =r mecidiyenin bir sene sonunda ulaşılan= $r \times r = r^2$ üçüncü sene sonunda ulaşılan =r^2 mecidiyenin bir sene sonunda ulaştığı = $r^2 \times r = r^3$ ve aynı şekilde olup "$\boldsymbol{r^n}$" bir mecidiyenin n sene sonunda ulaştığı miktar olur. Bu durumda eğer re'sü'l-mâl q mecidiye olmuş olsa iş bu q mecidiyenin ulaştığı bir mecidiyenin ulaştığının q katı olduğundan $m = q\, r^{n}$ olup istenen elde edilir.

Sonuç 1: Yukarıda bulunmuş olan denklemden

$$q = m / r^{n} \qquad n = \frac{\log m - \log q}{\log r} \qquad r = \left(\frac{m}{q}\right)^{1/n}$$

Sonuç 2: ***Faiz*** $= m - q = qr^n - q = q(r^n - 1)$

Örnek: 3 sene sonunda 600 mecidiye almak için senelik yüzde beş faiz ile ne miktar akçe verilmesi gerekir?

Bu bölümde r=1,05 n=3 m=600

Bu sonuçtan $q = m/r^{n} = 600/(1{,}05)^3 = 518{,}302$ mecidiye yani 518,302 mecidiyenin verilmesi gerektiği açıkça görülmüş olur.

(186) Bileşik faiz tabiri, çoğunlukla faizin her sene sonunda re'sü'l-mâle katılmasına işaret eder ise de bazen faiz yarım sene ve 4 sene sonuna değin işlediğinden önceki maddede bulunmuş olan baliğ kuralının bu sebepten dolayı bazı miktarın değiştirilmesi gerekir. Şöyle ki, eğer r miktarı bir mecidiyenin bir senelik faizini gösterse biraz önce açıklandığı üzere q mecidiyenin n sene sonunda baliği $q = (1 + r)^n$ olur. Lakin eğer $\frac{r}{2}$ miktarı bir mecidiyenin yarım senelik faizi olmuş olsa $1+\frac{r}{2}$ = bir mecidiyenin yarısı senelik baliği olduğundan

$(1+\frac{r}{2})^2$ = bir mecidiyenin bâliği bir senelik

$(1+\frac{r}{2})^3$ = ……. bir buçuk senelik

$(1+\frac{r}{2})^4$ = ……iki senelik

$(1+\frac{r}{2})^{2n}$ = ……n senelik

Ve bunun gibi gösterilir ki eğer $\frac{r}{4}$ bir mecidiyenin her bir 4 senelik faizi olmuş olsa q mecidiyenin n senede elde edilen baliği $q(1+\frac{r}{4})^{4n}$ ve genel olarak eğer faiz birbirine eşit zamanlarda senede k defa işlemiş tasvir olunsa bu takdirce her bir mecidiyenin faizi $\frac{r}{k}$ olmakla q mecidiyenin n senede elde edilen baliği

$= q\ (1+\frac{r}{k})^{nk}$ olmuş olur.

Mesele herhangi bir miktar akçe faiz basit ve bileşik hesabınca senelik belli bir faiz ile ne sürenin kendisini tezyif eder. Basit faiz hesabınca;

$$m = q + q\,n\,r$$

$$\therefore\quad 2\,q = q\,(1+r)^{\,n}$$

Ya da $(1 + r)^{n} = 2$

$$\therefore\quad n = \frac{\log 2}{\log 1+r}$$

Altta konu cetvel iş bu bulunan iki kural aracılığıyla hesap olunmuş olup farklı faizler ile herhangi bir akçe kendisini tazıf edeceği süreler zikredilen cetveli yazılmış olup logaritma cetvelleri aracılığıyla her birilerinin imtihan durumları isteyeninin badi-i muharetleri olacağından zikredilen cetvelin bu yere konulması uygun görülmüştür.

Bu da biline ki ilm-i cebir hendese ilimlerine ve hakimiyenin esası olan bir büyük faydalı işler ilmi olarak durum elde edilmesi işlemlerine daha çok uğraşı ile olup eğer derun-u risalede(risale içinde) mübtedilere(yeni bir şey icat eden) kolaylaştırma zammınında maddeleriyle bazı örnekler açıklanmış ise de zikredilen örnekleri yeterli olmadığından iş bu risalenin sonuna da gerekli cevapları birçok örnek eklenmştir.

Kad kemal cebir ilmi konusu bi ‘avnillâh el-melik el-kadir başlangıçta şaban el-muazzam el-sene altı ve altmış ve iki yüz ve bin (1266) min hicret min lehü el-izz ve’ş şeref.

2.3. USÛL-İ CEBR KİTABININ MATEMATİKSEL DEĞERLENDİRMESİ

1. Günümüzde bu çeviri metni lisede öğrenim gören öğrencilere doğrudan okutabiliriz. Ders kitabını bölümlere ayırdığımız takdirde ise bazı konular ortaokul müfredatında okutulabilir. Kitap cebirin tanımı ile başlıyor. Matematikte dört işlemi toplama, çıkarma, çarpma ve bölmeyi tanımlıyor. Üslü niceliği ve nicelikleri karşılaştırmada kullanılan sembolleri (<,=,>)anlatıyor. Bu konular ortaokul 6. sınıf müfredatında anlatılmaya başlanmaktadır ve ilerleyen yıllarda kapsamı genişleyerek devam etmektedir. Daha sonra kareköklü nicelikleri anlatıyor. Karekök konusu ortaokulda ilk defa 8. sınıf müfredatı içinde yer almaktadır. Rasyonel ve irrasyonel nicelikleri tanımlıyor, cebirsel niceliğin tanımını veriyor. Bu konular ise 6. sınıf müfredatı içinde yer almaktadır. Cebirsel Niceliklerde Toplama, Cebirsel Niceliklerde Çıkarma, Cebirsel Niceliklerde Çarpma ve Cebirsel Niceliklerde Bölme konuları 7. sınıf matematik müfredatı içinde yer almaktadır. Kesirli Niceliklerde Toplama ve Çıkarma, Kesirli Niceliklerde Çarpma ve Bölme 6. Sınıfta anlatılmaktadır. Cebirsel Niceliklerin Kuvvetleri ve Karekökleri, İrrasyonel Nicelikler, İrrasyonel Niceliklerde Toplama ve Çıkarma, İrrasyonel Niceliklerin Çarpımı, İrrasyonel Niceliklerin Bölümü, İrrasyonel Niceliklerin Kuvvetinin ve Köklerinin Alınması 8. sınıf müfredatında yer almaktadır. Bu konulardan sonra gelen Karmaşık Nicelikler ile başlayan konular lise müfredatında yer almaktadır. Karmaşık Nicelikler lisede 10.sınıfta öğrenilmektedir. Birinci Dereceden Denklemler ve Birinci Dereceden Denklemleri Ortaya Çıkaran Problemler 9. sınıf müfredatında yer almaktadır. İkinci Dereceden Denklemler ve İkinci Dereceden Denklemleri Ortaya Çıkaran Problemler 10. sınıf ve 11. sınıf matematik müfredatında yer almaktadır. Oran ve orantı konusu 6. sınıf ve daha sonraki sınıflarda matematiğin vazgeçilmez konularındandır. Permütasyon ve Kombinasyon ilk defa lisede 10. sınıfta görülmektedir. Diziler ve logaritma yine lisede ilk defa görülen konulardan olup 12. Sınıf müfredatında yer almaktadır. Faiz konusu ortaokulda 7. sınıf müfredatında anlatılmaya başlanmaktadır ve ilerleyen yıllarda bileşik faiz konusu da eklenerek lisede de işlenmektedir. Tahir Paşa’nın cebir kitabı faiz konusu ile bitmekte ve kitabın sonunda alıştırmalar yer almaktadır.

2. Bugün mühendislik fakültelerinde bu eser okutulmuyor öğrencilerin temel matematik bilgisine sahip olduğu düşünülerek. Ancak 19. yy'a baktığımızda 19. yy'da eserin askeri okullarda cebir ders kitabı olarak hazırlandığı ve okutulduğu anlaşılmaktadır. Eserin sahibi Bostânîzade Tahir Paşa zaten Harbiye Mektebinde *Cebir* ve *Cebr-i Âlâ* dersleri veren bir hocadır.

3. Cebir Osmanlıda medreselerde ve medrese dışında mimaride, gündelik işlerde, feraiz işlerinde kullanıla gelen Osmanlıların yabancısı olmadığı bir bilim dalıdır. Eserin sonunda bu hususa da yer verilmiştir.

4. İnisiyalerin kullanılmış olmaması erken dönem matematik ve cebir kitaplarında özgün formül kullanılmaya çalışıldığını görüyoruz. Sözlü anlatım yerine özgün formüller kullanılmaktadır. Eser bir ders kitabı olması hasebiyle zaten didaktik bir tarzda hazırlanması doğaldır. Ders kitabı olduğundan dolayı öğretici tarzda hazırlanmıştır. Pekiştirmek amacıyla her konunun sonunda bolca örnek verilmiştir. Hatta eserin sonunda bu örnekler çeşitlendirilmiştir.

5. 19. yy'ın ikinci yarısından itibaren Osmanlı Devleti'nde bilim ve eğitim alanında bilhassa Avrupa'ya gönderilmiş öğrenciler – ki bunların birçoğu askeri alanda eğitim görmüştür – yurda döndüklerinde verilen önemli askeri görevlerde bulunmuşlardır. Aynı dönemde devlet politikası olarak Avrupa'daki eserlerin Türkçeye tercüme edilmesi teşvik edilmiştir. Osmanlı aydınları ve subayları bu teşvikten istifade etmek ve bir eser ortaya koymak gayesi ile ve hatta rütbelerinin yükselmesini hedefleyerek yoğun bir şekilde tercüme hareketine dahil olmuştur. Tezimizde ele aldığımız Bostanîzâde Mehmet Tahir Paşa ise eğitimde eksikliğini hissettiği 'cebir' konusunda tercüme değil doğrudan bir eser telif etmeyi tercih etmiştir. Dolayısıyla tezimizin konusunu ihtiva eden Bostanîzâde Mehmet Tahir Paşa'nın "*Usûl-i Cebr*" adlı eseri bu açıdan ayrıca önemi haizdir.

6. Bu kitap Osmanlı'daki cebir eğitiminin seviyesini de aksettirmektedir. Bu eserin yazımından 20 yıl önce mühendishanelerde okutulan Başhoca İshak Efendi'nin hazırlamış olduğu "*Mecmûa-i Ulûm-i Riyaziye*" adlı eserde cebir kısmı ile karşılaştırıldığında Tahir Paşanın kitabının seviyesinin ortaya çıktığı görülür. Özellikle integral, diferansiyel konularının eğitiminin yerleşmesi ve uygulamada

kullanılır olması ancak 1880'lerde sivil mühendislik okullarında kullanılmasıyla yaygınlaşmıştır. Ve Tahir Paşa'dan sonra dünyada matematik alanındaki gelişmeler göz önünde bulundurularak bu eserin döneminde temel cebir eğitimi için yeterli ve önemli bir eser olduğunu söyleyebiliriz.

2.4. YÖNTEM

Bu eserin ve kapsamının günümüz okuyucusuna aktarılması. Öncelikle transliterasyonu yaptık. Transliterasyonda bilim tarihi yaklaşımı olarak bu eseri günümüz okuyucularının da anlamaları ve örnekleri çözebilmeleri, kullanılan bilimsel dili ve terminolojiyi gelecek nesillere aktarmak için sadece transliterasyonla değil sadeleştirmeyi de gerekli gördük. Ekte hazırlamış olduğumuz matematik terimleri sözlüğündeki karşılıklar, sadeleştirmede metin içerisinde yerli yerinde kullanılmıştır. Böylelikle geçmiş ve gelecek arasında köprü oluşturulmuştur.

2.4.1. Transliterasyonda Denklemlerdeki Osmanlıca Harflerin Yerine Kullanılan Semboller:

ب	$= b$		ع	$= y$
ج	$= c$		ض	$= z$
د	$= d$		ر	$= r$
ه	$= e$		و	$= v$
م	$= m$		ک	$= k$
ن	$= n$		ی	$= i$
ق	$= q$		ط	$= t$
ل	$= l$		ح	$= h$
س	$= x$		ف	f

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. USÛL-İ CEBR KİTABININ TRANSLİTERASYONU

3.1. USÛL-İ CEBR

Bismillâhirrahmânirrahîm

Hamd-i bî nihâye ❁ ve şükrü sitâyiş-i bilâ gâye ❁ Ol kâsımu nahnü kasemnâ ve ol câmiʿ-i cemʿiyyet-i yevm-i tablâ ❁ tenezzehe zâtehû ani'l-muʿâdale ve'ş-şürekâ hazretlerine nisbet-i mahsûsa ile ❁ ehas ve ahrâdır ki ❁ zât-ı vahdâniyeti ❁ emsâl ve enbâzdan muarrâ ❁ ve kemmiyet-i kudret-i samedâniyyesi ❁ taʿyîn ve tahdîdden müberrâdır. ❁ Ve salavât-ı râfiatü'd-deracât ❁ ve teslîmât-ı mütevâliyetü'l-berekât ❁ ol ziver-i sadr-ı serâ-yı risâlet ❁ vasıtatül-akdi silsile-i nübüvvet ❁ evvelîne hurûf-i kitâb-i rahmet ❁ ve nâzım-ı evzâʿ ve terkîbât-ı şerîʿati efendimiz hazretlerinin ❁ atabe-i aliyye ve sedde-i seniyye-i kudsiyyelerine muhattas ve şâyândır ki ❁ "Levlâke levlâk lemâ halaktü'l-eflâk" ❁ müfâd-i hakikat-i erâsîle ❁ sebep-i hestî-yi ʿâlem buyurulmuştur. ❁ Ve tarziyye ve taʿzîmât ❁ ol âl ve ensâb ❁ husûsan cihâr-ı yâr-i güzîn ❁ ve bi'l-cümle ensâr ve muhâcirîn ❁ rıdvânallahu Teâlâ aleyhim ecmaʿîn ❁ efendilerimiz hazerâtına ithâf ve ihdâ kılınır ki ❁ cebr u mukâbele ve cihâd u mukâtele ile bast-ı hudûd muʿâdele-i millet-i islâmiyye ❁ ve terfîʿ-i hadd-i şerîʿat-ı Ahmediyye buyurarak ❁ dîn-i mübîn-i müsbet ve menfî envaʿ-i evâmir ve nevâhî ile ❁ teşrîh ve taʿyîn buyurmuşlardır. ❁ Baʿde zâ, muhsinât-ı cenab-ı pâdişâhî ve âsâr-ı hayriyye-i şehinşâhîden olup bendegân-ı saltanat-ı seniyyeden bulunan zabitân-ı askeriyyenin tahsîl-i fünûn-i harbiyye eylemeleri zımmında akdemce binâ ve ihyâ buyurulan Mekteb-i Harbiyye-i Şâhâne'de ❁ ulûm-i hendesiyye ve hikemiyyenin esâsı ve bi'l-cümle muhâsebâtın muʿtenâsı makâmında olup azîmü'n-nefʿ ❁ ve yesîru'l-fehm olân ❁ ilm-i cebr ve mukâbele hocalığı me'mûriyet-i celîlesiyle bekâm buyurulan bu abd-i âciz ve ahkar ❁ ve bende-i nâçîz ve kemter ❁ mîr Mehmed Tâhir kulları ❁ beher sene ilm-i mezkûru bazı kütüb-i efrenciyyeden ꙰ evrâk-ı perâkende üzerine bi'ttercüme şâkirdân-ı harbiyyeye ꙰ taʿlîm etmekte isem de ꙰ mürûr-i âvân ile evrâk-ı mezbûre ꙰ perâkende ve ilm-i merkûm istiʿmâlinde sühuletî mûcib olur. ꙰ Bir nice hiyel ve desâdîs-i pesmâde olacağı maʿlûm erbab-ı basîret ꙰ ve meczûm-i ashâb-ı fetânettir. ꙰ Eğerçi üstâd-ı müteʿahhirînden ꙰ Mühendishâne-i Berrî-yi Hümâyûn ꙰ esbak Başhocası el-Hâc Hâfız İshak Efendi'nin ꙰ tercüme ve tenkîhine muvaffak oldukları ulûm-i riyaziyyenin cild-i evvelinde ꙰ ilm-i mezkûr hakkına bir mikdâr kavâʿid irâd edip ꙰ ve mütercimi nâ- maʿlûm bir ve iki risâle dahi mevcut ise de ꙰ ifadeleri gayet mücmel ꙰ ve mübtedîler hakkında olan emsile-i lâzimesi ekal olup ꙰ halbu ki mesâil-i cebriyyenin hall-i turuk-i kesîreye ve kavânin-j vefireye ꙰ ve hâriçde tatbîk ve icrâları ꙰ ancak emsile-i müteʿaddedenin icrâlarında kemâl-i mümâreset tahsîline mütevakkıf ve menût olmakla ꙰ kavâid-i kesîre ve emsile-i vefîreyi ꙰ müştemil bir risâle-i tercüme ve tenkîhi bir nice evkâtten beri ꙰ merkûz-i dil-bendegî idi. ꙰ İşte bu sûretin kuvveden fiile ihrâcına sarf-ı nakdine ced ve ihtimam birle ꙰ li'lâhi'l-hamd ve'l-menâh ꙰ hâlâ surûr- ârâ-yı saltanat-ı uzmâ ꙰ erîke pîrâ-yı hilâfet-i kübrâ ꙰ nâsır-ı ıslâh--ı mesâlih-i zir-destân ꙰ zeriʿa-i ittisâk-ı umûr-i âlemiyân ꙰ menbaʿı adl ve kerem ꙰ mecmûʿ-i lutf ve himem ꙰ şevketlü, mehâbbetlü, kudretlü, azametlü, veli'l-niʿmet-i âlemiyân ꙰ es-Sultân İbnü's-Sultân es-Sultân Abdulmecîd Hân ꙰ İbnü's-Sultân el-Gâzî Mahmûd Hân ꙰ İbnü's-Sultân el-Gâzî Abdulhamîd Hân ꙰ efendimiz hazretlerinin sâye-i feyzavâye-i ꙰ mülûkânelerinde karîn-i hitâm olup ꙰ usûl-i cebr ismiyle tevsîm ꙰ ve bir mukaddime ve yüz seksen dört madde üzerine ꙰ tertîp ve taksîm ꙰ ve âhar risâlede dahi ecvibe-i mukteziyyeleriyle ꙰ emsile-i muhtelife derç ve testîr olunarak nîm nazar hazreti tâc-dârî ꙰ buyurulmak emniyyesiyle meʿa iʿtirâfu'l-acz ve'l-kusûr arz ve takdîme ictisâr kılındı. Vallahu veliyyü't-tevfîk.

3.2. MUKADDİME

Bismillâhirrahmânirrahîm

3.2.1. İşârâtın taʿrîfâtı ve taʿbîrâtı beyânındadır.

(1) Kemmiyât mutlaka hurûfât ile ifâde ve beynlerinde olan tenâsüb dahi alâmât-ı mahsûsa vâsıtasıyla işʿâr olunarak istiʿmâl olunan kavâʿid-i umûmiyyeye ilm-i cebir tesmiye olunur. İmdi kemmiyât-i mezkûreyi işʿâr için ebced hurûf-i hecâsı istiʿmâl olunarak hurûfât-ı mezkûrenin evvel harfleri olan işbu b ve c ve d ve e harfleriyle maʿlûm olmakta olan kemmiyât işʿâr ve x y q z harfleri olan işbu x ve y ve q ve z harfleriyle dahi mechûlü'l-miktar olan kemmiyât irae olunup ve işbu kemmiyâtın beynlerinde vâkıʿ tenâsüb dahi bazı işârât-ı mahsûsa ile ifade olunmak ilm-i mezkûrun usûlünden olmağın ber vech-i âtî zikr olunur.

(2) Şöyle ki işbu + alâmet-i zâʿid taʿbîr olunur ki bir kemmiyetin evveline vazʿ olundukta evvel kemmiyetin kemmiyet-i âhara zammına delâlet eder.

Farazâ $b + c$ taʿbîrî c harfiyle irâe olunan kemmiyetin b harfiyle irâe olunan kemmiyete zammı demek olup meselâ b harfi 5 adedi irâe edip ve c harfi 7 adedi irâe eylese $b + c$ taʿbîri 12 adedi irâe eder. Ve eğer bir kemmiyetin evvelinde hiçbir alâmet mevzûʿ değil ise kemmiyet-i mezkûrenin evvelinde dâimâ işbu + alâmeti melhûzdur. Nitekim b kemmiyeti $+ b$ kemmiyeti demektir. Ve bu nevi kemmiyâta kemmiyât-ı müsbete ıtlâk olunur.

(3) Ve keza işbu – alâmet-i nâkıs taʿbîr olunur ki bir kemmiyetin evveline vazʿ olundukta evvel kemmiyetin kemmiyet-i âhardan tarhına delâlet eder. Şöyle ki $b - c$ terkîbi c kemmiyetinin b kemmiyetinden tefrîkini işʿâr edip meselâ b harfi 7 ve c harfi 5 adetden ibâret olsa $b - c$ taʿbîrî 7 nâkıs 5 yani 2 demek olur. İşte bu vechle evveline – nâkıs alâmeti vazʿ olunmuş olan kemmiyâta kemmiyât-ı menfîyye tesmiye olunur.

(4) Ve işbu x alâmet-i darb taʿbîr olunur ki iki kemmiyet beyninde bulundukta ol kemmiyetlerin birbirine darbına delâlet eder. Şöyle ki $b \times c$ taʿbîrî b harfiyle irâe olunan kemmiyetin c harfiyle irâe olunan kemmiyete darbını işʿâr eder. Ve bazen alâmet-i mezkûre terk olunarak bu vechle $b\,c\,d$ yahud $b\,.\,c\,.\,d$ tahrîr olunur ki $b \times c \times d$ demek olur. Eğer iki veyâ ziyâde olan erkâmın birbirleriyle darbları

murâd olunur ise bâlâda zikr olunan darb alâmetinin terkî câ'iz olmayarak dâima erkâm-ı mezkûrenin beynlerine tahrîr olunur. Ve dahi kemmiyât-i müteʿaddedenin darblarında kemmiyât-ı merkûmenin her birine hâsıl-ı darbın madrûbu tesmiye olunur. Meselâ 3 $b\ c\ d$ hâsıl-ı darbında 3 ve b ve c ve d kemmiyetlerinin her birine bir madrûb denilip ve keza 3 b ve 3 c ve 3 $b\ c$ ve 3 $b\ d$ ve 3 $c\ d$ ve $b\ c$ ve $b\ d$ ve $c\ d$ ve $b\ c\ d$ kemmiyetlerinin her birine yine hâsıl-ı darb-ı mezkûrun madrûbları ıtlâk olunur.

(5) Eğer bir kemmiyet kendi nefsine birkaç defa darb olunsa işbu tekrârı işʿâr için hâsıl-ı darbın fevkine tekrar olunan adet kerrât-ı terkim olunur.

Şöyle ki b^{1} b^{2} b^{3} b^{4} .. lh kemmiyetleri b ve $b \times b$ ve $b \times b \times b$ ve $b \times b \times b \times b$ kemmiyetlerine delâlet ederek kemmiyât-i mezkûrenin fevklerine tahrîr olunan erkâma evvel kemmiyetin kuvveti veyâ as'ı taʿbîr olunur. Nitekim b^{1} kemmiyeti b kemmiyetinin birinci kuvveti ve b^{2} kemmiyeti b kemmiyetinin ikinci kuvveti yahud murabbaʿ ve b^{3} kemmiyeti b kemmiyetinin üçüncü kuvveti yahud mikaʿbı ve hâkeza tesmiye olunurlar.

(6) İşbu ÷ alâmete taksîm taʿbîr olunur ki iki kemmiyet beynine vazʿ olundukta kemmiyeteyni mezkûreteynden kemmiyet-i evvelin kemmiyet-i sânî üzerine taksîmi işʿâr eder. Şöyle ki $b \div c$ taʿbîrî b kemmiyetinin c kemmiyeti üzerine taksîmini ifade eder. İmdi b kemmiyetinin c kemmiyete taksîmini işʿâr için bu vechle b/c dahi tahrîr olunup b taksîm c taʿbîr olunarak işbu taʿbîre kesîr dahi tesmiye olunup b kemmiyetine kesr-i mezkûrun sûreti ve c kemmiyetine mahreç ıtlâk olunur. Ve bazen bu vechle $b : c$ dahi tahrîr olunarak yani işârat-ı merkûmeye bedel iki sıfır ʿamûdî istiʿmâl olunur.

(7) İşbu ∽ alâmet iki kemmiyet beyninde bulundukda kemmiyeteyn-i mezkûreteynin azamından asgarînin tarhınî işʿâr eder. Meselâ $b \backsim x$ taʿbîrî b ve x kemmiyetlerinden herhangisi azam ise azamından asgarînin tarhınî ifade edip ve bu $b - x$ yahud $x - b$ demek olarak yani kemmiyeteyn-i merkûmeteyn beyninde vâkıʿ fâzlın istihrâcına delâlet edip tefâzul tesmiye olunur.

(8) İşbu > alâmet iki kemmiyet beyninde vâkıʿ oldukta kemmiyet-i evvelin sânîden azamiyetini işʿâr edip ve alâmet-i mezkûre bu vechle < tahrîr olunur ise kemmiyet-i evvelin sânîden asgarîyetini irâe eder yani zâviye-i mezbûrenin açık tarafında bulunan azam ve kapalı tarafında bulunan asgarî demek olur. Kaldı ki ∴ alâmetiyle ∵ alâmetinin dahi istiʿmâli bu fende kavâid-i merʿiyyeden olarak işbu alâmetlerin

evvelkisine *bu sebepden* ve ikincisine *zirâ* tesmiye olunur. Yani bazı ibarât ve müʿâdelât aralarında icâbı sûretinde li ecli'l-ihtisâr *bu sebepden* yerine üç sıfır mebsût ve *zirâ* mahaline yine üç sıfır maʿkûs vazʿ olunur.

(9) Bazı kere kemmiyât-ı müteʿaddedenin cümlesini birden ahzı için *muʿteride* tesmiye olunan işbu ( ) ve { } ve [ ] alâmetleri istiʿmâl olunur. Şöyle ki $b-c+d$ kemmiyeti $v-e$ kemmiyetinin madrûbu olduğunu işʿâr için bu vechle $(b-c+d) \times (v-e)$ tahrîr olunarak $b-c+d$ kemmiyet-i hâsılının $v-e$ tefâzuluna darbı işʿâr eder. İmdi *b* kemmiyeti 6 ve *c* kemmiyeti 5 ve *d* kemmiyeti 4 ve *v* kemmiyeti 3 ve *e* kemmiyeti 1 olsa $b-c+d$ taʿbîrî $6-5+4$ yahud 5 olup $v-e$ taʿbîrî dahi $3-1$ yahud 2 olarak bu sûretde $(b-c+d) \times (v-e)$ taʿbîrî 5 x 2 yahud 10 olmuş olur. Ve keza $(b\,c-d\,e) \times (b\,c-d\,e)$ taʿbîrî $(b\,c-d\,e)^2$ taʿbîrîne müsâvî olarak $(b\,c-d\,e)$ kemmiyetinin kendi nefsine hâsıl-ı darbına delâlet eder. Ve bazı ahvâlde kemmiyât-ı müteaddedenin cümlesini birden ahz olunduklarını müşiʿr fevklerine bir hatt-ı keşide olunup bu vechle $\overline{b-c+d} \times \overline{v-e}$ dahi tahrîr olunarak $(b-c+d) \times (v-e)$ demek olur.

(10) İşbu = alâmeti müsâvî taʿbîr olunur ki iki kemmiyet beynine vazʿ olundukta kemmiyet-i mezkûreteynin birbirine müsâvâtınî işʿâr eder.

Şöyle ki, $b\,x-c\,y=d\,e+b\,e$ taʿbîrî $b\,x-c\,y$ kemmiyetinin $d\,e+b\,e$ kemmiyetine müsâvâtinî işʿâr eder.

(11) Bir kemmiyetin cezr-i murabbaʿ şol bir kemmiyettir ki cezr-i merkûm kendi nefsine darb yani terbîʿ olundukta kemmiyet-i mezkûreye müsâvî ola ve bir kemmiyetin cezr-i mukaʿabî şol bir kemmiyettir ki kemmiyet-i mezbûra kendi nefsine iki defa darb yani tekʿîb olundukta kemmiyet-i mezkûreye müsâvî ola ve keza bir kemmiyetin *n* kuvvetden cezrî şol bir kemmiyettir ki *n* kuvvete rafiʿ olundukta kemmiyet-i mezkûreye müsâvî ola ve işbu cezr amelini işʿâr için işbu $\sqrt[\square]{\square}$ yahud $\sqrt[2]{\square}$ ve $\sqrt[3]{\square}$ ve $\sqrt[4]{\square}$ ve $\sqrt[n]{\square}$ lh işâretlerî istiʿmâl olunarak cezrleri matlûb olan kemmiyâtın cânib-i yeminine tahrîr olunup kemmiyât-ı merkûmenin cezr-i murabbaʿ ve cezr-i mukaʿabî ve dördüncü kuvvetden cezrini işʿâr eder.

Nitekim $\sqrt[2]{b^2} = b$ $\sqrt[3]{b^3} = b$ $\sqrt[4]{b^4} = b$ $\sqrt[n]{b^n} = b$ kemmiyetlerinde olduğu gibi imdî cezrlerî matlûb olan kemmiyâtın fevklerine işbu 1/2 ve 1/3 ve 1/4 lh küsurâtı tahrîr olunarak kemâ fî's-sâbık cezriyâtı işʿâr olunabilir.

Şöyle ki $b^{1/2}$ ve $b^{1/3}$ ve $b^{1/4}$ ve $b^{1/n}$ kemmiyetleri b kemmiyetinin cezr-i murabbaʿ ve cezr-i mikaʿbı ve dördüncü kuvvetden cezrî ve n kuvvetden cezrini işʿâr idûb ve keza $b^{5/2}$ ve $b^{7/3}$ ve $b^{3/5}$ taʿbîrlerî b kemmiyetinin beşinci kuvvetinin cezr-î murabbaʿ ve yedinci kuvvetinin cezr-î mukaʿabî ve üçüncü kuvvetinin beşinci cezrlerini irâe eder.

(12) Tamamen cezrlerinin ahzı mümkün olan kemmiyâta meczûrât-ı muntak ve gayri mümkün olan kemmiyâta meczûrât-ı asame tesmiye olunur.

(13) Kemmiyâtın beynlerinde olan nisbeti işʿâr için işbu : ve :: nikâta istiʿmâl olunur. Şöyle ki $b : c :: d : e$ taʿbîri b kemmiyetinin c kemmiyetine olan nisbeti d kemmiyetinin e kemmiyetine olan nisbetine müsâvî olduğunu işʿâr eder.

(14) Kemmiyât-ı cebriyenin taraf-i yeminine vazʿ olunarak kemmiyât-ı mezkûrenin kaç defa ahz olunduğunu yani adet-i izʿaf ve emsâlinî işʿâr eden rakama emsâl rakamı tesmiye olunup işbu $7\,b\,x$ ve $6\,c\,y$ ve $3\,d\,z$ kemmiyetlerinde olan 7 ve 6 ve 3 rakamları $b\,x$ ve $c\,y$ ve $d\,z$ kemmiyetlerinin emsâl rakamları olur. Emsâl rakamından ârî olan hudûd-u cebriyenin ilm-i hesapda beyân olunduğu üzere cüz-ü sahîhleri olmayan adâd-ı mütebâyinenin vefkleri vâhid olduğu gibi emsâl rakamları dahi dâimâ vâhid olarak $b\,c$ kemmiyeti bir kere $b\,c$ demek olur. Ve bazen emsâl rakamında adet yerine hurûfat dahi tahrîr oluna gelip meselâ $q\,x^3$ ve $k\,x^2$ ve $r\,x$ kemmiyetlerinde q ve k ve r harfleri x^3 ve x^2 ve x kemmiyetlerinin emsâl harfleri olmuş olur.

(15) Yalnız emsâl rakamları muhtelif olân kemmiyât-ı cebriyeye kemmiyât-ı cebriye-i müteşâbihe ve kemmiyât-ı muhtelifenin bir yere cemʿıyle hâsıl olan terkîbât-ı muhtelifeye kemmiyât-ı cebriye-i gayri müteşâbihe tesmiye olunur. Meselâ $4\,b$ ve $6\,b\,c$ ve $9\,b^2$ ve $3\,b^2\,c\,d$ kemmiyâtıyla $15\,b$ ve $3\,b\,c$ ve $12\,b^2$ ve $15\,b^2\,c\,d$ kemmiyâtının nazîr nazîre bulunanları yalnız emsâl cihetiyle muhtelif olmağın kemmiyât-ı müteşâbihe ve $b\,c$ ve $b^2\,c$ ve $b\,c\,d$ kemmiyetleri kemmiyât-ı muhtelifenin bir yere tecemmüʿnden hâsıl olmağın kemmiyât-ı gayri müteşâbihe olur.

(16) Bir kemmiyet kemmiyet-i âharî birkaç defa tamâmuhâ hâvî olsa kemmiyet-i evvelîye kemmiyet-i sânînin izʿâfı tesmiye olunur. Şöyle ki $16\,b$ kemmiyeti $4\,b$ kemmiyetini dört defa tamamen hâvî olmağın işbu $16\,b$ kemmiyeti $4\,b$ kemmiyetinin izʿâfı olmuş olur.

(17) Bir kemmiyet kemmiyet-i âharde birkaç defa tamamen mevcut olsa kemmiyet-i evvelîye kemmiyet-i sâninin kâsımî tesmiye olunur. Şöyle ki $4\,b$ kemmiyeti $16\,b$

kemmiyetinde tamamen dört kere mevcut olmağın $4\,b$ kemmiyetine $16\,b$ kemmiyetinin kâsımî denilir.
(18) Yalnız bir haddan ibâret olan işbu $b^{2}\,c\,d$ kemmiyetine zü hadd-ı vâhid ıtlâk olunur.
(19) İki haddan ibâret olan işbu $b+c$ ve $2\,b-3\,c$ terkîblerine zû'l-haddeyn ve üç hadden ibâret olan işbu $2\,b+c-3\,e$ terkîbine zü hudûd-u selase tesmiye olunup ikeden ziyâde olan kemmiyâta ʿale'l-ʿumûm zü had-ı kesîre ıtlâk olunur.
Müteʿârife
Eğer müsâvî kemmiyetler diğer müsâvî kemmiyetler ile cemʿ olunsalar mecmûʿları dâhî birbirine müsâvî olurlar.
Eğer müsâvî kemmiyetler müsâvî kemmiyetlerden tarh olunsalar bâkiyeler dâhî birbirine müsâvî olurlar.
Eğer müsâvî kemmiyetler bir kemmiyet-i âhar ile yahud kemmiyeteyn-i mütesâveteyn ile darb olunsalar hâsılları dâhî birbirine müsâvî olurlar.
Eğer müsâvî kemmiyetler diğer bir kemmiyet üzerine yahud kemmiyeteyn-i mütesâveteyn üzerine taksîm olunsalar hâric kısmetleri dâhî birbirine müsâvî olurlar.
Eğer bir kemmiyet kemmiyet-i âhara bir defa zam olunup ve bir defa tarh olunsa işbu kemmiyet-i âhirin kıymetine asla halel gelmez.
Eğer bir kemmiyet kemmiyet-i âhara bir defa darb olunup ve bir defa taksîm olunsa işbu kemmiyet-i evvelinin kıymetine asla halel gelmez.

3.2.2. ❁ Kemmiyât-ı cebriyenin cemʿi beyanındadır ❁

(20) Kemmiyât-ı cebriyenin cemʿ hudûd-u müteşâbihelerî cemʿ birle mecmûʿları ve hudûd-u gayri müteşâbihelerî işâretleriyle bir sıraya tahrîr olunmakla olur.
Misâl 1 Zîrde muharrer kemmiyât-ı gayri müteşâbihenin cemʿ matlûbdur.

$$\begin{array}{r} b\,x \\ -c\,y \\ e^{2} \\ -e\,d \\ \hline \end{array}$$

$b\,x-c\,y+e^{2}-e\,d$ = mecmûʿ

Misâl 2

$b + 2\,c - d$

$v - d\,e + q$

$b + 2\,c - d + v - d\,e + q$ = mecmûʿ

İşbu mecmûʿlarda bulunan kemmiyât-i müteʿaddedenin yalnız işâretlerine dikkat olunup tertîb-i hurûfâta aslâ riʿâyet olunmaz. İmdi zikrolunan mecmûʿlarda eğer hudûd-u müteşâbihe bulunur ise hudûd-u mezkûre birbirleriyle cemʿ olunarak hâsıl-ı mecmûʿ bu vechle ihtisâr olunmuş olur. Evvelâ hadleri müşâbih ve işâretleri mümâsil olan kemmiyâtın cemʿnde emsâl rakamları cemʿ olunarak işbu mecmûʿun cânib-i yemînine işâretleri tahrîr olunup ve cânib-i yesârine hudûd-u mezkûrede müşterek olan harfler tahrîr olunur.

Misâl 3

$5\,b - 3\,c$

$4\,b - 7\,c$

$9\,b - 10\,c$ = mecmûʿ

Misâl 4

$4\,b^{2}\,d - 10\,c\,e$

$6\,b^{2}\,d - 9\,c\,e$

$11\,b^{2}\,d - 3\,c\,e$

$21\,b^{2}\,d - 22\,c\,e$ = mecmûʿ

İşbu icrâ olunan ʿamelin sebepi aşikârdır. Şöyle ki 5 b mazmumiyle 4 b mazmumî cemʿ olundukta 9 b mazmumî hâsıl olup 3 c matruhiyle 7 c matruhî cemʿ olundukta 10 c matruhî hâsıl olur.

Sâniyen işâretleri muhtelif olan kemmiyât-ı müteşâbihenin cemʿlerinde müsbet olan emsâller birbirleriyle cemʿ olunup menfî olan emsâller dahi birbirleriyle cemʿ olunarak işbu mecmûʿ-ı evvel ile mecmûʿ-ı sânî beynindeki tefâzul ahz ve işbu tefâzulün evveline zikrolunan mecmûʿların hangisi azam ise ânın işâreti tahrîr olunur.

Misâl 5

$7\,b + 3\,c$

$-5\,b - 9\,c$

$2\,b - 6\,c$ = mecmûʿ

İşbu ʿamelin evvelinde bulunan 7 kere *b* mazmûmiyle 5 kere *b* matrûhî birbirinden tarh olunarak 2 *b* mazmûmi bâkî kalıp ve ʿamel-i mezkûrun âharında bulunan 3 kere *c* mazmûmiyle 9 kere *c* matrûhî bʿade'l-ıslah 6 kere *c* matrûhî bâkî kalarak iʿtâ olunan kemmiyât-ı müteşâbihenin matlûb olunan cemʿ $2\,b - 6\,c$ kemmiyeti olmuş olur.

Misâl 6

$b + c$

$b - c$

$2\,b$ = mecmûʿ

Bundan istintâc olunur ki müsbet ve menfî işaretlerine makrûn olan kemmiyât-ı müteşâbihenin cemʿnde müsbet işaretlerine makrûn olan kemmiyâtın emsalleri cemʿ olunup ve menfî işaretlerine makrûn olan kemmiyâtın emsalleri dahi cemʿ olunarak işbu mecmûʿ-ı evvel mecmûʿ-ı sânîden bʿade'l-tarh bâkî kalan kemmiyetin evveline mecmûʿndan hangisi azam ise onun işareti tahrîr olunur.

Misâl 7

$3\,b^2 + 4\,c\,d - e^2 + 10$

$-5\,b^2 + 6\,c\,d + 2\,e^2 - 15$

$-4\,b^2 - 9\,c\,d - 10\,e^2 + 21$

$-6\,b^2 + c\,d - 9\,e^2 + 16$ = mecmûʿ

Misâl 8

$4\,b\,d - 15\,c\,e + v\,x$

$11\,b\,d + 7\,c^2 - 19\,v\,x$

$-41\,b^2 + 6\,c\,e - 7\,e\,v$

$15\,b\,d - 41\,b^2 - 9\,c\,e + 7\,c^2 - 18\,v\,x - 7\,e\,v$ = mecmûʿ

Misâl 9

$$q\,x^{3} - l\,x^{2} - r\,x$$
$$b\,x^{3} - c\,x^{2} - x$$

$$(q + b)\,x^{3} - (l + c)\,x^{2} - (r + 1)\,x \;= \text{mecmû‘}$$

İşbu dokuzuncu misâlde x kemmiyetinin kuvvetleri mevcubunca emsâlleri birleşmiştir. Çünkü $(q + b)\,x^{3} = q\,x^{3} + b\,x^{3}$ ve keza $-(l + c)\,x^{2} = -l\,x^{2} - c\,x^{2}$ zîrâ bir mu‘terizenin evvelinde bulunan alâmet-i mu‘terize derûnunda bulunan hadlerin cümlesine te'sîr etmekte bu vechle $-(r + 1)\,x = -r\,x - x$ olmuş olur.

3.2.3. ❁ Kemmiyât-ı cebriyenin tarhı beyanındadır. ❁

(21) Tarh yahud bir kemmiyetin kemmiyet-i âhardan ifrâzî işbu ifrâz olunacak kemmiyetin işaretleri tebdîl olunarak kemmiyet-i âhar üzerine yirminci madde vasıtasıyla zam ile olur.

Misâl 1

$2\,c\,x$ kemiyetinden $d\,y$ kemmiyetinin tarhî bu vechle $2\,c\,x - d\,y$ işʿâr olunur. Zîrâ $d\,y$ kemmiyetinin evveline vazʿ olunan – alâmeti kemmiyet-i mezkûrun $2\,c\,x$ kemmiyetinden tarhını irâe ederek $2\,c\,x - d\,y$ zû hadeyni $2\,c\,x$ kemiyetiyle $-\,d\,y$ kemmiyetinin mecmûʿî olmuş olur.

Misâl 2

Ve yine $2\,c\,x$ kemmiyetinden $-\,d\,y$ kemmiyeti tarh olunsa tefâzul-u matlûb bilakis $2\,c\,x + d\,y$ kemmiyeti olur. Zîrâ $2\,c\,x = 2\,c\,x + d\,y - d\,y$ olduğundan (müteʿarife 5) işbu kemmiyeteyn-i mütesâvîyeteynden $-\,d\,y$ kemmiyeti tarh olunarak bakılır dahi birbirine müsâvî olmağın $2\,c\,x$ kemmiyetiyle $-\,d\,y$ kemmiyeti beyninde olan tefâzul $2\,c\,x + d\,y$ kemmiyeti olup $2\,c\,x$ kemmiyetiyle $+\,d\,y$ kemmiyeti mecmûʿna müsâvî olmuş olur.

Misâl 3

$b + c$ kemmiyetinden
$b - c$ kemmiyeti tarh

$+\,2\,c$ = tefâzul

Misâl 4

$6\,b - 12\,c$ kemiyetinden

$-5\,b - 10\,c$ kemmiyeti tarh

$11\,b - 2\,c$ = tefâzul

Misâl 5

$5\,b^{2} + 4\,b\,c - 6\,x\,y$ kemmiyetinden

$11\,b^{2} + 6\,b\,c - 4\,x\,y$ kemmiyeti tarh

$-6\,b^{2} - 2\,b\,c - 2\,x\,y$ = tefâzul

Misâl 6

$4\,b - 3\,c + 6\,d - 11$ kemmiyetinden

$10\,x + b - 15 - 2\,y$ kemmiyeti tarh

$-10\,x + 3\,b - 3\,c + 4 + 6\,d + 2\,y$ = tefâzul

Misâl 7

$b\,x^{3} - c\,x^{2} + x$ kemmiyetinden

$q\,x^{3} - l\,x^{2} + r\,x$ kemmiyeti tarh

$(b - q)\,x^{3} - (c - l)\,x^{2} + (1 - r)\,x$ = tefâzul

İşbu yedinci misâlde emsâl harfleri birleşmiştir. Çünkü $(b - q)\,x^{3}$ kemmiyeti $b\,x^{3} - q\,x^{3}$ kemmiyetine ve $-(c - l)\,x^{2}$ kemmiyeti $-c\,x^{2} + l\,x^{2}$ kemmiyetine müsâvî olup ve $(1 - r)\,x = x - r\,x$ olmuş olur.

3.2.4. ꙮ Kemmiyât-ı cebriyenin darbî beyanındadır. ꙮ

(22) Müfred olan kemmiyât-ı cebriyenin darbı beşinci maddede zikrolunan tʿarife tatbikan işʿâr olunur. Şöyle ki $b \times c$ yahud *b c* taʿbîri *b* kemmiyetinin *c* kemmiyetine hâsılı darbını irâe edip ve keza *b c d* taʿbîri *b* ve *c* ve *d* kemmiyât-ı selasenin hâsılı darbını işʿâr ederek bu vechle kemmiyât-ı müfred-i sâirenin dahi hâsıl-ı darbları tahsîl olunur. Ve ʿameli darbda asla tertip-i hurûfa riayet-i lazımadan olmayıp ancak $b \times c$ tahririyle *c* x *b* tahriri birbirinin aynı olmuş olur. Zirâ $1 \times b = b \times 1$ yani vahidin *b*

kere ahzı b kemmiyetinin bir kere ahzına müsâvî olup ve keza c kemmiyetinin b kere ahzı yahud $c \times b$ vahidin b kere ahzından c kere azam olup b kemmiyetinin c kere ahzı yahud $b \times c$, c kemmiyetinin 1 kere ahzından b kere azam olmağın (müteʿarife 3) $c \times b = b \times c$ olur. Ve bu misillü ispat olunur ki $b\,c\,d = d\,b\,c = c\,d\,b$ çünkü akdemce beyan olunduğu üzere $1 \times b \times c = b \times c \times 1$ olup $d \times b \times c$ kemmiyeti $1 \times b \times c$ kemmiyetinden d kere azam olup ve keza $b \times c \times d$ kemmiyeti $b \times c \times 1$ kemmiyetinden d kere azam olarak $b \times c \times d = d \times b \times c$ olur ve kıs âleyh'i-l bevâkî

(23) İmdi hâsılı darbın işaretini tayin için kavâʿıd-ı âtiyeye dikkat olunmak lazımadandır. Şöyle ki eğer madrûb ve madrûb-u fihin işaretleri mümâsil ise hâsılı darbın işareti dâimâ zâʿid ve eğer muhalif ise hâsılı darbın işareti nâkıs olur. Yani madrûbeyn-i mezkûreynin ikisi dahi zâʿid iseler hâsılı darb zâʿid olup ve eğer nâkıs iseler bilakis yine zâʿid olur. Ve madrûbeynden biri zâʿid âhari nâkıs ise hâsılı darb nâkıs olur. Şöyle ki evvela $+\,b\,x + c = +\,b\,c$ zirâ bu bâbda b kemmiyetinin c kere müsbet olarak ahzı matlûb olmağın hâsılı darb müsbet olarak $b\,c$ olmuş olur.

Sâniyen $-\,b\,x + c = -\,b\,c$ zirâ $-\,b$ kemmiyet-i menfîyenin c kere ahzı matlûb olmağın işbu darbdan $-\,b\,c$ kemmiyet-i menfîyesi hâsıl olur.

Sâlisen $+\,b\,x -\,c = -\,b\,c$ çünkü b kemmiyetinin $-\,c$ kemmiyetiyle darbı demek c kemmiyetinin âhârı miktarınca b kemmiyetinin tarhı demek olmağın b kemmiyetinin c kere tarhî $-\,b\,c$ olarak bu keyfiyet zîrde gelecek yirmi altıncı maddenin ikinci misâlinden dahi layıkıyla münfehim olur.

Râbian $-\,b\,x -\,c = +\,b\,c$ bu dahi $-\,b$ kemmiyetinin c kere tarhî yani $-\,b\,c$ matruhî hâsıl olûb işbu matrûhın tekraren tarhî demek (madde 21) $+\,b\,c$ kemmiyetinin cemʿ demek olur.

İmdî vec-i sâni ile vec-i rabia be vechle dahi ispat olunabilir ki $b - b = 0$ olmağın işbu müsâvâtın tarefeyni c kemmiyetiyle darb olundukta $b\,c$ ile $-\,b\,c$ mecmûʿî $0 \times c$ yahud sıfıra müsâvî olmağın $-\,b$ kemmiyeti c kemmiyetiyle darb olundukta $-\,b\,c$ kemmiyeti hâsıl olmak lazım gelir ki $b\,c$ kemmiyetiyle cemʿ olunarak işbu mecmûʿ sıfıra muʿadil ola ve yine $b - b = 0$ müsâvâtının tarefeyni $-\,c$ kemmiyetiyle darb birle $-\,b\,c$ ile $-\,b\,x - c$ mecmûʿî sıfıra müsâvî olmak lazım gelmegin ol sebepden $-\,b\,x - c = +\,b\,c$ olduğu zâhir olup matlûb sâbit olur.

(24) Eğer madrûb ile madrûb-u fihde emsâl rakamları bulunur ise erkâm-ı mezkûre kâʿide-i hesap üzere birbirine darb olunup hâsıl-ı darbın işâreti ve hurûfâtî bâlâda zikrî sebkat eden kavâʿide tatbiken eshel-i vechle tayin olunurlar.

Meselâ

$3\,b \times 5\,c = 15\,b\,c$ zirâ $3 \times b \times 5 \times c = 3 \times 5 \times b \times c = 15\,b\,c$ (madde 22) ve yine $4\,x \times -11\,y = -44\,x\,y$ ve $-9\,c \times -5\,d = +45\,c\,d$ ve $-6\,\mathrm{e} \times 4\,m = -24\,e\,m$ olur.

(25) Bir kemmiyetin kuvvetlerinin hâsıl-ı darbı üs rakamlarının cemʿiyle olur. Faraza $b^2 \times b^3 = b^5$ olur. Zirâ $b^2 = b \times b$ ve $b^3 = b \times b \times b$ olduğundan $b\,b \times b\,b\,b = b\,b\,b\,b\,b$ olup ve keza $b^6 \times b^{10} = b^{16}$ ve $-3\,b^2\,x^3 \times 5\,b\,x\,y^2 = -15\,b^3\,x^4\,y^2$ olur. Ve m ile n iki kemmiyet müsbet olarak $b^m \times b^n = b^{m+n}$ olduğunun ispatı murâd olunsa altıncı madde ile $b^m = b \times b \times b \times b \times \ldots\ldots$ lh m adet madrûba değin ve keza $b^n = b \times b \times b \times b \times \ldots\ldots$ lh n adet madrûba değin bu sebepden $b^m \times b^n = b \times b \times b \times b \times \ldots.\, m$ adet madrûba değin $b \times b \times b \times b \times \ldots.\, n$ adet madrûba değin $= b \times b \times b \times b \times \ldots\; m + n$ adet madrûba değin $= b^{m+n}$ olup matlûb sâbit olur.

(26) Eğer madrûb ile madrûb fih hudûd-u kesîreden ibâret ise madrûb fihin her bir haddî madrûbun her bir had ile darb olunup işbu hâsıl-ı darbların mecmûʿî kemmiteyn-i mezkûreteynin birbirine hâsıl-ı darbı olmuş olur.

Misâl 1

$b + c$ darb

$d + e$ ile

$b\,d + c\,d + b\,e + c\,e$ = hâsıl-ı darb

İşbu misâlde $b + c$ kemiyetinin $d + e$ kere ahzı matlûb olmağın evvel dahi d ve e kere demek olarak $(\,b + c\,)\,d + (\,b + c\,)\,e$ olup matlûb hâsıl olur.

Misâl 2

$b + c$ darb

$d - e$ ile

$b\,d + c\,d - b\,e - c\,e$ = hâsıl-ı darb

İşbu misâlde dahi $b + c$ kemiyetinin $d - e$ kere ahzı matlûb olmağın ol dahi müsbet olarak *d* kere ahzıyle menfî olarak *e* kere ahzı demek olur.

Misâl 3

$$\begin{array}{l} b + c \\ b + c \\ \hline b^2 + b\,c \\ \quad + b\,c + c^2 \\ \hline b^2 + 2\,b\,c + c^2 \end{array}$$

Misâl 4

$$\begin{array}{l} b + c \\ b - c \\ \hline b^2 + b\,c \\ \quad - b\,c - c^2 \\ \hline b^2 - c^2 \end{array}$$

Misâl 5

$$\begin{array}{l} 3\,b^2 - 5\,c\,d \\ -5\,b^2 + 4\,c\,d \\ \hline -15\,b^4 + 25\,b^2\,c\,d \\ +12\,b^2\,c\,d - 20\,c^2\,d^2 \\ \hline -15\,b^4 + 37\,b^2\,c\,d - 20\,c^2\,d^2 \end{array}$$

Misâl 6

$b^2 + 2bc + c^2$

$b^2 - 2bc + c^2$

$b^4 + 2b^3c + b^2c^2$

$\quad - 2b^3c - 4b^2c^2 - 2bc^3$

$\quad\quad + b^2c^2 + 2bc^3 + c^4$

$b^4 - 2b^2c^2 + c^4$

Misâl 7

$1 - x + x^2 - x^3$

$1 + x$

$1 - x + x^2 - x^3$

$+ x - x^2 + x^3 - x^4$

$1 - x^4$

Misâl 8

$x^2 - qx + l$

$x + b$

$x^3 - qx^2 + lx$

$+ bx^2 - bqx + bl$

$x^3 - (q - b)x^2 + (l - bq)x + bl$

İşbu misâlde x^2 ile x kemmiyetlerinin emsâlleri birleştirilmişdir. Çünkü,

$-(q - b)x^2 = -qx^2 + bx^2$ ve $(l - bq)x = lx - bqx$

kemmiyetleri birbirlerinin aynıdır.

3.2.5. ❁ Kemmiyât-ı cebriyenin taksîmî beyanındadır. ❁

(27) Bir kemmiyetin kemmiyet-i ahar üzerine taksîmi kemmiyet-i sâni kemmiyet-i evvelde kaç kere mevcut olduğunu yahud kemmiyet-i evvelin müsâvîsîni tahsîl için kemmiyet-i sâninin hangi kemmiyet ile darb olunacağını istihsâl etmekden ibâret olup. Şöyle ki $b\ c$ kemmiyetinin b kemmiyeti üzerine taksîmi b kemmiyeti kaç kere ahz oluna ki $b\ c$ kemmiyeti hâsıl ola yani b kemmiyeti hangi kemmiyet ile darb oluna ki $b\ c$ kemmiyeti hâsıl ola demek olup işbu madrûbun c kemmiyeti olduğu emr-i aşikârdır. İmdi işbu tasviratdan kemmiyât-i cebriyenin taksîmi için kavâid-i âtiye terettüb eder.

(28) Eğer maksûm ve maksûm-u ʿaleyhin işaretleri mümâsil ise hâric-i kısmetde + alâmeti ve muhtelif ise hâric-i kısmetde – alâmeti tahrir olunur. Meselâ $-\ b\ c$ kemmiyeti $-\ b$ kemmiyeti üzerine taksîm olunsa hâric-i kısmet $+\ c$ kemmiyeti olur. Zirâ $-\ b$ kemmiyetinin $+\ c$ kemmiyetine hâsıl-ı darbı $-\ b\ c$ kemmiyeti olup taksîmin vücûh-u sâiresî dahi bu vechle ispat olunabilir.

(29) Kemmiyât-ı müfredenin taksîminde maksûm-u ʿaleyhin emsâl rakamıyla kısm-ı harfîsî maksûmda bulunur ise onlar birbirlerine taksîm ile vahide müsâvî olup maksûmun kısm-i bâkîsiyle akdemce zikr-ü beyân olunan kâʿide mûcibince işâreti tayin olunarak hâric-i kısmetde tahrîr olunur.

Meselâ $b\ c\ d\ /\ b\ c = d$ olur. Zirâ $b\ c$ maksûm-u ʿaleyhi d hâric-i kısmetiyle darb olundukta $b\ c\ d$ maksûmû hâsıl olup ve eğer maksûm-u mefrûz evvela b kemmiyetine bʿade c kemmiyetine taksîm olunsa hâric-i kısmet yine evvelkinin aynı olur. Şöyle ki $b\ c\ d\ /\ b = c\ d$ ve $c\ d\ /\ c = d$ hâric-i kısmet yine d kemmiyeti olmuş olur.

(30) Tenbih, eğer bir kemmiyetin herhangi kuvveti kuvvet-i âhar üzerine taksîm olunsa hâric-i kısmet kemmiyet-i mezkûreye müsâvî olarak üssü dahi maksûmun üssüyle maksûm-u ʿaleyhin üssü tefâzulüne müsâvî olur.

Çünkü, $b^5 / b^3 = b \times b \times b \times b \times b \,/\, b \times b \times b = b^2$ olup

ve keza $b^3 / b^6 = 1 / b^3$ ʿale'l-ʿumûm m ve n kemmiyetleri iki kemmiyet müsbet farz olunsa $b^m / b^n = b^{m-n}$ olur.

Çünkü, $b^m/b^n = b \times b \times b \times b \times \ldots\ m$ adet madrûba değin $/ b \times b \times b \times b \times \ldots\ n$ adet madrûba değin $= b \times b \times b \times b \times \ldots\ m - n$ adet madrûba değin olmakla m kemmiyeti n kemmiyetinden aʿzam olarak $= b^{m-n}$ olup b^m kemmiyetiyle b^n kemmiyetinin hâric-i kısmeti olmuş olur.

(31) Eğer maksûm-u ʿaleyhin madrûblarından bazıları maksûmda bulunub bazıları bulunmadığı takdirde (madde 27) zikr olunan kâʿideye mütabakatla taksîm işʿâr olunup maksûm ile maksûm-u ʿaleyhde müşterek olan madrûblar mahv ve izale olunur. Şöyle ki, $15\,b^3\,c^2\,d$ kemmiyeti $-3\,b^2\,c\,x$ kemmiyeti üzerine taksîm olunarak $15\,b^3\,c^2\,d\,/-3\,b^2\,c\,x = -5\,b\,c\,d\,/\,x$ olup $-5\,b\,c\,d$ kemmiyeti x kemmiyeti üzerine dâhî taksîm olunacak ise de (madde 29) maksûmda x kemmiyeti bulunmadığından taksîm amelinin icrâsî mümkün olmamakla bu vechle $-5\,b\,c\,d\,/\,x$ tahrîr olunarak fakat sûret-i işʿârda kalmış olur.

(32) Eğer maksûm-u hudûd-u kesîreden ibâret olup maksûm-u ʿaleyhi zû had vâhid olur ise maksûmun her bir haddî maksûm-u ʿaleyh üzerine taksîm olunur.

Meselâ $b^3\,x^2 - 5\,b\,c\,x^3 + 6\,b\,x^4\,/\,b\,x^2$

$= b^3\,x^2\,/\,b\,x^2 - 5\,b\,c\,x^3\,/\,b\,x^2 + 6\,b\,x^4\,/\,b\,x^2$

$= b^2 - 5\,c\,x + 6\,x^2$ olur.

(33) ve eğer maksûm ile maksûm-u ʿaleyhden her biri zû hudûd-u kesîre olur ise evvelâ işbu zû hudûd-u kesîre kendilerinde bulunan hurûfatdan birinin kuvvetlerine riayeten tanzim olunarak maksûmun hadd-ı evveli maksûm aleyhin hadd-ı evvelini kaç kere şâmil ise işbu kemmiyet hâric-i kısmetde hadd-ı evvel olarak tahrîr oluna. Bʿade hadd-ı evvel maksûm-u aleyhin her bir haddı darb ile hâsıl-ı darb maksûmdan tarh olunup maksûmun bâkî kalan hadlerinden lüzumu miktarı hadd-ı maksûmun tahtına tenzîl birle vech-i meşruh üzere taksîm nihayet buluncaya değin zikr olunan ʿamel iâde ve tekrar olunarak hâric-i kısmet matlûb istihsâl olunur.

Misâl 1 Eğer $b^2 - 2\,b\,c + c^2$ zû hudûd-u kesîresinin $b - c$ zû hadeyni üzerine taksîmi murâd olunsa tarîk-i icrâsı vech-i âtî üzeredir.

$$
\begin{array}{l}
b - c)\; b^2 - 2\,b\,c + c^2\; (b - c \\
\qquad\; b^2 - 2\,b\,c \\
\hline
\qquad\; -b\,c + c^2 \\
\qquad\; -b\,c + c^2 \\
\hline
\qquad\quad \cdot \quad \cdot
\end{array}
$$

Ve bu kâidenin sebebi şu olur ki maksûm kendi eczâları mecmûʿndan ibaret olmağın maksûm-u aleyh maksûmda bulunduğu ehâd miktarınca maksûmun eczâlarında dahi bulunmağın bâlâda mefrûz misâlde evvela b kemmiyetinin b^2 kemmiyetinde kaç defa mevcut olduğu tahrîr olunup bulunan b kemmiyeti hâriç-i kısmetin hadd-ı evveli olarak işbu kemmiyet maksûm-u aleyhin cemʿi hadleriyle darb olunup hâsıl-ı darb olan $b^2 - b\,c$ kemmiyeti maksûmdan bʿade'l-tarh bâkî kalan $- b\,c + c^2$ zû hadeyniyle kemâ fi's-sâbık ʿamel olunur.

fî'l-hakîka $b^2 - 2\,b\,c + c^2$ zû hudûd selasesi bâlâda icrâ olunan amel vasıtasıyla iki kısma taksîm olunup her biri $b - c$ kemmiyeti üzerine taksîm olunsa hâric-i kısmet hakiki hâsıl olur.

Misâl 2

$$
\begin{array}{l}
b + c\ )\ b\,d + b\,e + c\,d + c\,e\ (\ d + e \\
\qquad b\,d + c\,d \\
\qquad \overline{\qquad\qquad\quad} \\
\qquad b\,e + c\,e \\
\qquad b\,e + c\,e \\
\qquad \overline{\qquad\qquad\quad} \\
\qquad\quad \cdot \quad \cdot
\end{array}
$$

Misâl 3

$$
\begin{array}{l}
1 - x\ )\ 1\ (\ 1 + x + x^2 + x^3 + \text{lh} + \text{bâkî} / 1 - x \\
\qquad 1 - x \\
\qquad \overline{\qquad\quad} \\
\qquad\ + x \\
\qquad\ + x - x^2 \\
\qquad\ \overline{\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad + x^2 \\
\qquad\qquad + x^2 - x^3 \\
\qquad\qquad \overline{\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\quad + x^3 \\
\qquad\qquad\quad + x^3 - x^4 \\
\qquad\qquad\quad \overline{\qquad\qquad\quad}
\end{array}
$$

$$+x^4 + \text{lh}$$

Misâl 4

$$y-1)\ y^3-1\ (y^2+y+1$$
$$y^3-y^2$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$+y^2$$
$$y^2-y$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$+y-1$$
$$+y-1$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$\cdot \quad \cdot$$

Misâl 5

$$x-z)\ x^m-z^m\ (x^{m-1}+x^{m-2}z+x^{m-3}z^2+ \ldots\ldots\ldots\ldots +z^{m-1}$$
$$x^m-x^{m-1}z$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$+x^{m-1}z-z^m$$
$$+x^{m-1}z-x^{m-2}z^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$+x^{m-2}z^2-z^m$$
$$+x^{m-2}z^2-x^{m-3}z^3$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$+x^{m-3}z^3-z^m \text{ lh}$$

İşbu taksîm m kemmiyetinin herhangi kıymet-i mefrûzası için kesîrsiz müntehâ olup hâric-i kısmetin had ahîrî z^{m-1} olarak adet-i hudûdû m kemmiyetine müsâvî olur.

Misâl 6

$$x-b)\ x^3-qx^2+lx-r\ (x^2+(b-q)x+b^2-qb+l$$
$$x^3-bx^2$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$(b-q)x^2+lx$$
$$(b-q)x^2-(b^2-qb)x$$

$$+ (b^2 - q b + l) x - r$$
$$+ (b^2 - q b + l) x - (b^3 - q b^2 + l b)$$

$$b^3 - q b^2 + l b - r$$ Bâkî.

3.2.6. ❁ Küsurât-ı cebriyenin kıymetde müsâvî küsurât-ı âhara nakl ve tahvil beyanındadır.❁

(34) Eğer bir kesrin sûretiyle mahreçinde olan hadların işaretleri tebdîl olunsa kesr-i mezkûrun kıymeti tağyir olmaz.

Zirâ $-b\,c\,/-b = +c = +b\,c\,/+b$ ve

$b\,c\,/-b = -c = -b\,c\,/+b$ olur.

(35) Eğer bir kesrin sûretiyle mahreçi bir kemmiyet ile darb olunsa yahud taksîm olunsa kesr-i mezkûrun kezalik kıymeti tağyir olmaz.

Zirâ $b\,d\,/\,c\,d = b\,/\,c$ (madde 31) işte bu kâʿidey-i mebnî bir kesrin sûretiyle mahreçinde müşterek olan madrûb-u azam üzerine kesr-i merkûmun sûretiyle mahreçi taksîm ile ihtisâr olunup işbu fenin kavâʿid-i merʿıyesinden olarak madrûb-u azam mezbûre dâhî sûret-i kesîr ile mahreçin kâsım-ı müşterek azamî tesmiye olunur.

(36) Bir kesrin sûretiyle mahreçinden her biri zû had vâhîd olsa işbu kemmiyetlerin kâsım-ı müşterek azamînın nazarda maʿlûm olmağın kesr-i mezkûrun ihtisârî dâhî asân olur. Meselâ $3\,b^2\,c\,d\;/\;5\,b^3\,c^2\,e$ kesrinin ihtisârî mûrad olunsa $b^2\,c$ kemmiyeti sûretiyle mahreçin kâsım-ı müşterek azamî olduğu aşikâr olmağın, ol sebepden kesr-i mezkûr $3\,d\,/\,5\,b\,c\,e$ kesrine ircâʿ olunmuş olur. Kaldı ki, bir kesrin sûretiyle mahreçi kemmiyât-ı merkûbeden ibâret olsa kesr-i mezkûrun ihtisârî için zîrde muharrer kâʿideye teşebbüs olunmak icâbet eder.

(37) Kemmiyât-ı cebriye merkûbeden her iki kemmiyetin kâsım-ı müşterek azamlarını istihrâcda kemmiyeteyn-i mezkûrateyn kendilerinde bulunan hurûfatdan birinin kuvvetlerine nazaran tanzim olunup, kemmiyet-i azam kemmiyet-i ʿasgar üzerine taksîm ve işbu taksîmden bâkî kalır ise maksûm-u aleyh, işbu bâkî üzerine yine taksîm ve bu minvâl üzere her maksûm-u aleyh kendi bâkîyesi üzerine bir şey bâkî kalmayıncaya değin taksîm olundukta maksûm-u aleyh ahar kemmiyeteyn-i mefrûzateynin matlûb olan kâsım-ı müşterek azamî olmuş olur.

Meselâ, b ve c iki kemmiyetden c kemmiyeti b kemmiyetinde d kesrî bâkî kalarak v kere mevcut ve yine işbu d kesrî c maksûm-u aleyhinde e kesrî bâkî kalarak l kere mevcut olsa işbu ʿamel bir şey kalmayıncaya değin icrâ olunarak maksûm-u aleyh ahîr olan e kemmiyeti b ile c kemmiyetlerinin kâsım-ı müşterek azamları olur ve tarîk-ı icrâsî bu vechledir.

$$
\begin{array}{l}
c\ )\ b\ (\ v \\
\quad v\,c \\
\quad \overline{\quad\quad} \\
\quad d\ )\ c\ (\ l \\
\quad\quad d\,l \\
\quad\quad \overline{\quad\quad} \\
\quad\quad e\ )\ d\ (\ r \\
\quad\quad\quad r\,e \\
\quad\quad\quad \overline{\quad\quad}
\end{array}
$$

(38) Bu kâʿedenin sıhhatî işbu iki usûle tevakkuf eder. Evvelâ eğer bir kemmiyet üzerine kemmiyet-i âhar tamamen taksîm olunur ise kemmiyet-i evvel üzerine kemmiyet-i sâninin herhangi izʿâfî dahi tamamen taksîm olunur. Faraza, x kemmiyeti üzerine y kemmiyeti n ehâdî miktarınca tamamen taksîm olunsa işbu x kemmiyeti üzerine $d\,y$ kemmiyeti dahi $n\,d$ ehâdî miktarınca taksîm olunur.

Sâniyen eğer bir kemmiyet üzerine kemmiyeteyni âhareyni tamamen taksîm olunsa işbu kemmiyet üzerine kemmiyeteyni âhareyni mezkûreynin mecmûʿlarıyla beynlerinde olan tefâzul dahi tamamen taksîm olunur.

Meselâ, b kemmiyeti x kemmiyetinde m defa ve y kemmiyetinde n defa mevcut olsa $m\,b = x$ ve $n\,b = y$ olmağın tarefeyn cemʿı ve tarh olundukta

$x \pm y = m\,b \pm n\,b = (m \pm n)\,b$ olup b kemmiyeti $x \pm y$ kemmiyetinde $m \pm n$ defa mevcut olduğu yahud b kemmiyeti üzerine $x \pm y$ kemmiyeteyni âhareyni mecmûʿ $m \pm n$ ehâdî miktarınca taksîm olunur.

(39) Otuz altıncı maddede icrâ olunan ʿamelden zâhir olduğu üzere $b - v\,c = d$ ve $c - l\,d = e$ olup b ile c kemmiyetlerini tamamen taksîm eden kemmiyet $v\,c$ ile $b - v\,c$ yahud d kemmiyetini taksîm itmeğin $l\,d$ ile $c - l\,d$ yahud e kemmiyetini taksîm edip bundan zâhir olur ki b ile c kemmiyetlerinden her birinin kâsım-ı müşterikî

d kemmiyetini tamamen taksîm eder. Ve otuz altıncı maddedeki taksîmden kezalik zâhir olur ki $b = v\,c + d$ ve $c = l\,d + e$ ve $d = r\,e$ olduğundan işbu e kemmiyeti d ve $l\,d$ ve $l\,d + e$ yahud c kemmiyetini taksîm edip bu sûretde kemmiyet-i mezkûr $v\,c$ ve $m\,c + d$ yahud b kemmiyetini taksîm ederek b ile c kemmiyetlerinin her bir kâsım-ı müşterikî e kemmiyetini tamamen taksîm edip işbu e kemmiyetî dahi b ile c kemmiyetlerini tamamen taksîm ederek onların kâsım-ı müşterek azamları olmuş olur.

Misâl 1

$b^2 + 2b + 1$ ve $b^3 + 2b^2 + 2b + 1$ zû hudûd-u kesîrelerin kâsım-ı müşterek azamlarının istihrâcıyla $b^2 + 2b + 1 / b^3 + 2b^2 + 2b + 1$ kesrinin ihtisârî bu vechledir.

$$
\begin{array}{l}
b^2 + 2b + 1\;)\;\; b^3 + 2b^2 + 2b + 1\;\;(\,b \\
\qquad\qquad\qquad\; b^3 + 2b^2 + b \\
\qquad\qquad\qquad\;\overline{\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b + 1\,)\; b^2 + 2b + 1\;(\,b + 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b^2 + b \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\overline{\qquad\quad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b + 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b + 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\overline{\qquad}
\end{array}
$$

Bu takdirce $b + 1$ zû'l-haddeyn kâsım-ı müşterek azam matlûb olup kesr-i mezkûrun sûretiyle mahreçî işbu zû'l-haddeyn üzerine taksîm olunarak $b + 1 / b^2 + 2b + 1$ kesrine ircâʿ olunup ihtisâr olunmuş olur.

Misâl 2

$b^4 - x^4$ ile $b^3 - b^2x - bx^2 + x^3$ kemmiyetlerinin kâsım-ı müşterek azamlarının istihrâcıyla $b^4 - x^4 / b^3 - b^2x - bx^2 + x^3$ kesrin ihtisârî bu vechledir.

$$
\begin{array}{l}
b^3 - b^2x - bx^2 + x^3\,)\;\; b^4 - x^4\;\;(\,b + x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b^4 - b^3x - b^2x^2 + bx^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b^3x + b^2x^2 - bx^3 - x^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b^3x - b^2x^2 - bx^3 + x^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2b^2x^3 - 2x^4 = 2x^2(b^2 - x^2)
\end{array}
$$

İşbu bâkîyeden $2 x^2$ terk olunarak maksûm-u aleyh $b^2 - x^2$ olup

$$
\begin{array}{l|l}
b^2 - x^2 \,) & b^3 - b^2 x - b x^2 + x^3 \; (\, b - x \\
 & b^3 - b x^2 \\
\hline
 & \quad - b^2 x + x^3 \\
 & \quad - b^2 x + x^3 \\
\hline
\end{array}
$$

olup kâsım-ı müşterek azam matlûb $b^2 - x^2$ olarak kesr-i mezkûr $b^2 + x^2 / b - x$ kesrine ircâʿ olunup ihtisâr olunmuş olur.

Kaldı ki, $2 b^2 x^2 - 2 x^3$ maksûm-u aleyhinin her bir hudûdunda bulunan $2 x^2$ kemmiyeti $b^3 - b^2 x - b x^2 + x^3$ maksûmunun her bir haddında bulunmadığından hazf olunur. Zirâ kemmiyet-i mezkûr hazf olunmasa haric-i kısmetin kesîrli olması lazım gelir ki bu ise kâsım-ı müşterek azam kâʿidesî ispatına mugayyer olmuş olur. Ol sebepden $2 x^2$ kemmiyeti maksûmunun her bir haddında bulunmadığından hazfiyle maksûm ve maksûm-u aleyhin kâsım-ı müştereklerinden hiçbir kısım terk olunmuş olmaz.

(40) Ekseriya ameliyatda iki veya ziyade olan kemmiyât-ı cebriyenin kâsım-ı müşterek azamları ânifen zikr olunan kâʿideden daha ziyade bir âsân-ı tarîk ile istihrâc olunur. Şöyle ki otuz dokuzuncu maddenin ikinci misâlinde olan $b^4 - x^4$ ile $b^3 - b^2 x - b x^2 + x^3$ kemmiyetlerinin işbu tarîkıyla kâsım-ı müşterek azamlarının istihrâcî murâd olunsa,

Evvela $b^4 - x^4 = (b^2 + x^2) (b^2 - x^2)$

Sâniyen $b^3 - b^2 x - b x^2 + x^3 = b^2 (b - x) - x^2 (b - x)$

$= (b^2 - x^2) (b - x)$

Bu takdirce kemmiyeteyn-i mefrûdeteynin madrûbları olan $b^2 + x^2$ ve $b - x$ kemmiyetlerinin vâhidden mâʿada kâsım-ı müşterek azamları olmadığından madrûb-u aharları olan işbu $b^2 - x^2$ zû'l-haddeyni kâsım-ı müşterek azamları olup matlûb hâsıl olur.

(41) ve bu minvâl üzere bir kesrin sûretiyle mahreçinin ihtisârî için iktizâ eden kâsım-ı müşterek azam kâʿidesî icrâʿ olunmaksızın kesr-i mezkûr ihtisâr olunur.

Misâl 1

İşbu $x^2 + 11 x + 30 / 9 x^3 + 53 x^2 - 9 x - 18$ kesrin ihtisârî mûrad olunsa

$x^2 + 11x + 30 / 9x^3 + 53x^2 - 9x - 18$

$= x(x+6) + 5(x+6) / 9x^2(x+6) - (x^2 + 9x + 18)$

$= (x+5)(x+6) / 9x^2(x+6) - (x+3)(x+6)$

$= (x+5)(x+6) / (9x^2 - x - 3)(x+6)$

olup işbu kesrin sûretiyle mahreçî $x + 6$ zû'l-haddeyni üzerine taksîm olundukta kesr-i mezkûr $x + 5 / 9x^2 - x - 3$ kesrine ircâʿ olunarak ihtisâr olunmuş olur.

Misâl 2

İşbu $x^2 + (b+d)x + bd / x^2 + (c+d)x + cd$ kesrin ihtisârî mûrad olunsa

$x^2 + (b+d)x + bd = x^2 + bx + dx + bd$

$= x(x+b) + d(x+b)$

$= (x+d)(x+b)$ ve keza

$x^2 + (c+d)x + cd = (x+d)(x+c)$ olarak $(x+b)(x+d) / (x+c)(x+d)$ kesrine ircâʿ olunup sûretiyle mahreçde müşterek olan madrûblar hazf olundukta kesr-i mezkûr $x + b / x + c$ olup ihtisâr olunmuş olur.

Misâl 3

$3b^2 - 3b^2c + bc^2 - c^3 / 4b^2 - 5bc + c^2$ kesrin ihtisârı murâd olunsa

$3b^2 - 3b^2c + bc^2 - c^3 / 4b^2 - 5bc + c^2$

$= 3b^2(b-c) + c^2(b-c) / 4b(b-c) - c(b-c)$

$= (3b^2 + c^2)(b-c) / (4b-c)(b-c)$

$= 3b^2 + c^2 / 4b - c$

Misâl 4

İşbu $(b+c)\{(b+c)^2 - d^2\} / 4c^2d^2 - (b^2 - c^2 - d^2)^2$ kesrin ihtisârı murâd olunsa

$(b+c)\{(b+c)^2 - d^2\} / 4c^2d^2 - (b^2 - c^2 - d^2)^2$

$= (b+c)(b+c+d)(b+c-d) / (2cd + b^2 - c^2 - d^2)(2cd - b^2 + c^2 + d^2)$

$= (b+c)(b+c+d)(b+c-d) / \{b^2 - (c-d)^2\}\{(c+d)^2 - b^2\}$

$= (b+c)(b+c+d)(b+c-d) / (b+c-d)(b-c+d)(b+c+d)(c+d-b)$

$= (b+c) / (b-c+d)(c+d-b)$

$= (b+c) / d^2 - (b-c)^2$

(42) Küsûrât-ı cebriyenin kıymetleri müsâvî ve mahreçleri müşterek olan küsûrât-ı âhare tahvil için her bir kesrin sûreti kendi mahreçinden mâʿada mahreçlara darb olunarak hâsıl-ı darb sûret kılınıb ve mahreçlarin hâsıl-ı darbı mahreç müşterek

kılınmakla olur. Şöyle ki, $b\,/\,c$ ve $d\,/\,e$ ve $v\,/\,q$ küsûrâtından bir minvâl meşruh $b\,e\,q\,/\,c\,e\,q$ ve $e\,c\,q\,/\,c\,e\,q$ ve $v\,c\,e\,/\,c\,e\,q$ küsûrât-ı hâsıl olarak kıymetleri küsûrât-ı evvelinin kıymetlerine müsâvî olup ve mahreçleri dahi $c\,e\,q$ mahreç-i müşterikî olmuş olur.

Zirâ $b\,e\,q\,/\,c\,e\,q = b\,/\,c$ ve $d\,c\,q\,/\,c\,e\,q = d\,/\,e$ ve $v\,c\,e\,/\,c\,e\,q = v\,/\,q$ (madde 35) her bir kesrin sûretiyle mahreçi herhangi bir kemmiyet ile yani küsûrât-ı bâkîye mahreçlerinin hâsıl-ı darblarına darb olunarak bu vechle tevhîd-i mahreç olmuş olur.

3.2.7. ❁ Küsurât-ı cebriyenin cemʿı ve tarhî beyanındadır. ❁

(43) Eğer cemʿı murâd olunan küsûrâtın mahreçlerî müşterek ise sûretlerî cemʿı olunup işbu mecmûʿn tahtına mahreç-i müştereklerin biri tahrir olunmakla olur. Meselâ $\frac{b}{c} + \frac{d}{c} = \frac{b+d}{c}$ ve bu keyfiyet otuz üçüncü maddede vazʿı olunan kâʿideden tertip eder.

(44) Eğer cemʿı olunacak küsûrâtın mahreçleri müşterek değil ise küsûrât-ı mezkûre mahreçlerî müşterek küsûrât-ı âhare nakl olunup (madde 42) kemâfî olsa bu cemʿı-ʿamel icrâ olunur.

Misâl 1

$$\frac{b}{c} + \frac{d}{e} = \frac{b\,e}{c\,e} + \frac{c\,d}{c\,e} = \frac{b\,e + c\,d}{c\,e}$$

Misâl 2

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-c}{b^2 - c^2} + \frac{b+c}{b^2 - c^2} = \frac{b - c + b + c}{b^2 - c^2} = \frac{2\,b}{b^2 - c^2}$$

Misâl 3

$$\mathrm{b} + \frac{e}{q} = \frac{b\,q}{q} + \frac{e}{q} = \frac{b\,q + e}{q}$$

İşbu misâlde b kemmiyetî mahreçî vâhid olan bir kesîr gibi ad olunur ki herhangi adet-i vâhide darb veyâ taksîm olunsa kıymetine halel gelmediği vâzhatdındır.

Misâl 4

$$2 + \frac{b+c}{b-c} + \frac{b-c}{b+c} = \frac{2\,b^2 - 2\,c^2}{b^2 - c^2} + \frac{b^2 + 2\,b\,c + c^2}{b^2 - c^2} + \frac{b^2 - 2\,b\,c + c^2}{b^2 - c^2}$$

$$= \frac{2\,b^2 - 2\,c^2 + b^2 + 2\,b\,c + c^2 + b^2 - 2\,b\,c + c^2}{b^2 - c^2} = \frac{4\,b^2}{b^2 - c^2}$$

(45) Eğer mahreçleri müşterek olan iki kesrin tefâzulları murâd olunsa kesreyn-i mezkûreynin sûretlerînin tefâzulları ihzâ olunup işbu tefâzulle mahreç-i müştereklerin biri mahreç kılınmakla olur.

Nitekim $\frac{b}{c} - \frac{d}{c} = \frac{b-d}{c}$ olduğu gibi (madde 33)

(46) Eğer küsûrât-ı mezkûrenin mahreçlerî müşterek değil ise mahreçlerî müşterek olan küsûrât-ı âhare tebdîl olunup bʿade tarh-ı amelî kemâfî olsa bu icrâ olunur.

Misâl 1

$$\frac{b}{c} - \frac{d}{e} = \frac{b\,e}{c\,e} - \frac{c\,d}{c\,e} = \frac{b\,e - c\,d}{c\,e}$$

Misâl 2

$$b - \frac{d\,e}{c} = \frac{b\,c}{c} - \frac{d\,e}{c} = \frac{b\,c - d\,e}{c}$$

Misâl 3

$$\frac{b}{c} - \frac{d+e}{d-e} = \frac{b\,d - b\,e}{c\,d - c\,e} - \frac{c\,d + c\,e}{c\,d - c\,e} = \frac{b\,d - b\,e - c\,d - c\,e}{c\,d - c\,e}$$

İşbu üçüncü misâlin sûretinde bulunan *c e* kemmiyetinin alâmeti nâkısdır. Zirâ kesr-i sânînin her bir kısmının kesr-i evvelden tarhî murâddır.

Misâl 4

$$\frac{b+c}{b-c} - \frac{b-c}{b+c} = \frac{b^2 + 2\,b\,c + c^2}{b^2 - c^2} - \frac{b^2 - 2\,b\,c + c^2}{b^2 - c^2}$$

$$= \frac{b^2 + 2\,b\,c + c^2 - b^2 + 2\,b\,c - c^2}{b^2 - c^2} = \frac{4\,b\,c}{b^2 - c^2}$$

3.2.8. ❁ Küsûrât-ı cebriyenin darb ve taksîmî beyanındadır. ❁

(47) Bir kesrin bir kemmiyet ile darbında kesrin sûreti işbu kemmiyet ile darb olunup hâsıl-ı darbın tahtına kesr-i mezkûrun mahreçi tahrîr olunur.

Nitekim, $\frac{b}{c} \times d = b \times \frac{d}{c}$ olduğu gibi. Zirâ maksûm-u aleyhler müsâvî olduğu halde herhangi bir maksûmdan maksûm-u âhire *d* kere azam olsa hâric-i kısmet evvelden hâric-i kısmet sânî *d* kere azam olur.

(Netice 1) $\frac{b}{c} \times c = b \times \frac{c}{c} = b$ olmağın eğer bir kesrin sûret-i mahreçiyle darb olunsa hâsıl-ı darb sûret-i mezkûre müsâvî olur.

(Netice 2) Bir kesrin sûreti bir kemmiyet ile darb olunsa yahud mahreçî taksîm olunsa hâsıllar birbirinin aynıdır. Farazâ *b e* / *c d* kesrinin sûreti bir *d* kemmiyetiyle darb olunsa hâsıl-ı darb $b\ e\ d\ /\ c\ d$ yahud $b\ e\ /\ c$ olup (madde 35) kesr-i mezkûrun mahreçi d üzerine taksîm olunarak hâdis olacak hâric-i kısmetin aynıdır.

(48) İki kesrin hâsıl-ı darbı sûretleri birbirine darb olunup hâsıl-ı sûret ve mahreçlerî dahi birbirine darb olunup hâsıl-ı mahreç kılınarak hâdis olan kesr olmuş olur. Farazâ, $b\ /\ c$ ile $d\ /\ e$ kesîrlerinin hâsıl-ı darbı $b\ d\ /\ c\ e$ olur.

Zirâ, $b\ /\ c = x$ ve $d\ /\ e = z$ farz olunsa $b\ /\ c$ ile x kemmiyeteyn-i mütesâviteynî c kemmiyetiyle darb olundukta $b = c\ x$ olur (muteʿârife 3). Ve bu vechle $d = e\ z$ olup zikr olunan muteʿârife mucibince $b\ d = c\ e\ x\ z$ olarak tarafeyn $c\ e$ üzerine taksîm olundukta $b\ d\ /\ c\ e = x\ z = b\ /\ c \times d\ /\ e$ (muteʿârife 4) olup matlûb sâbit olur.

(49) Bir kesrin bir kemmiyet üzerine taksîmî murâd olundukta mahreçi kemmiyet-i mezkûre ile darb olunup hâsıl-ı darb kesrin sûretine mahreç kılınır.

Nitekim, $b\ /\ c$ kesri d kemmiyeti üzerine taksîm olunsa hâric-i kısmet $b\ /\ c\ d$ olur. Zirâ $b\ /\ c = b\ d\ /\ c\ d$ olur. İşbu kesrin bir cüz'ü ahz olundukta $b\ /\ c\ d$ kesri hâdis olup sûreti sûret-i evvelin d cüz'ü ve mahreçî mahreç-i evvelin d misli olmuş olur.

(50) Bir kesri kesr-i âhar üzerine taksîmde maksûm-u aleyhin sûretiyle mahreçî ʿaks olunup kesr-i maʿkûs maksûm ile küsûrâtın darbı kâʿidesiyle darb olunur. Farazâ $b\ /\ c$ ve $d\ /\ e$ kesîrlerinin birbiri üzerine taksîmi

$b\ /\ c \div d\ /\ e = b\ /\ c\ \times\ e\ /\ d = b\ e\ /\ c\ d$ olur. Zirâ, $b/c = x$ ve $d\ /\ e = z$ farz olunsa kırk sekizinci maddede olduğu misillü $b = c\ x$ ve $d = e\ z$ olup ve keza $b\ e = c\ e\ x$ ve $c\ d = c\ e\ z$ olduğundan (muteʿârife 4)

$b\ e\ /\ c\ d = c\ e\ x\ /\ c\ e\ z = x\ /\ z = b\ /\ c \div d\ /\ e$ olur.

(51) Bir kemmiyetin kuvvey-i muhtelifesinin darbı için yirmi beşinci maddede ispat olunan kâʿide kuvvey-i menfîye için dahi cârî olur.

Şöyle ki, $b^{m} \times b^{-n} = b^{m-n}$ çünkü, $b^{m} \times b^{-n} = b^{m} \times 1/\ b^{n} = b^{m}\ /\ b^{n} = b^{m-n}$ olup bu minval üzere $b^{3} \times b^{-5} = b^{3}\ /\ b^{5} = 1/\ b^{2} = b^{-2}$ ve yine $b^{-m} \times b^{-n} = b^{-(m+n)}$ olup matlûb sâbit olur.

Netice eğer m kemmiyeti n kemmiyetine müsâvî olsa $b^{m} \times b^{-m} = b^{m-m}$ olup ve keza $b^{m} \times b^{-m} = b^{m}\ /\ b^{m} = 1$ olduğundan sonuç olur.

(52) Bir kemmiyetin herhangi iki kuvvetinin birbiri üzerine taksîmî için otuz ikinci madde de ispat olunan kâʿide kuvveteyn-i mezkûreteynin menfî kıymetleri için dahi müstemîl olur.

Şöyle ki, $b^{m} \div b^{-n} = b^{m} \div 1/b^{n} = b^{m} \times b^{n} = b^{m+n}$ ve yine
$b^{-m} \div b^{-n} = 1/b^{m} \div 1/b^{n} = b^{n}/b^{m} = b^{n-m}$ (madde 31) olur.
Netice bundan zâhir olur ki herhangi bir madrûb üssünün işaretinin tebdiliyle bir kesrin sûretinden mahreçine ve mahreçinden sûretine nakil olunabilir.
Nitekim, $b^{m} . b^{n} / c^{q} = b^{m} / b^{-n} . c^{q}$ ve
$b^{m} / b^{n} . c^{q} = b^{m} . b^{-n} / c^{q} = b^{m} . b^{-n} . c^{-q}$ kemmiyetlerinde olduğu gibi.

3.2.9. ❁ Kemmiyât-ı cebriyenin terfʿi ve teczirleri beyanındadır. ❁

(53) Eğer bir kemmiyet nefsine darb olunsa hâsıl-ı darba ol kemmiyetin rafʿî tesmiye olunup rafʿi olunduğu kuvvet nefsine darb olunduğu adet-i madrûbu ifade eder. Şöyle ki, $b \times b$ yahud b^{2} kemmiyeti b kemmiyetinin ikinci kuvveti ve $b \times b \times b$ yahud b^{3} kemmiyeti b kemmiyetinin üçüncü kuvveti ve $b \times b \times b \times$ ….. n adet madrûba değin yahud b^{n} kemmiyeti b kemmiyetinin n. kuvveti olmuş olur.
(54) Eğer rafʿî matlûb olan kemmiyet-i menfî olur ise kemmiyet-i mezkûrenin zevci kuvvetlere rafʿî müsbet ve ferdi kuvvetlere rafʿî menfîdir.
Zirâ $-b \times -b = b^{2}$ ve $-b \times -b \times -b = -b^{3}$ olur.
(55) Bir kemmiyet-i müfredin herhangi kuvveti rafʿî kemmiyet-i mezkûrede bulunan madrûblardan her birinin üssü kuvvet-i matlûba ile darb olunup işârâtî akdemce zikr olunan madde vasıtasıyla tayin olunarak evveline tahrir olunmakla olur. Şöyle ki, b^{m} kemmiyetinin n kuvvete rafʿî $b^{\mathrm{m}\,n}$ olur.
Zirâ $b^{m} \times b^{m} \times b^{m}$ …….. n adet madrûba değin kâʿide-i darb üzere $b^{m+m+m \,....\, n}$ hudûda değin yahud $b^{m\,n}$ olur ve keza
$(b\,c)^{n} = b\,c \times b\,c \times b\,c \times$…… lh n madrûba değin yahud $b \times b \times b \times$ …… n madrûba değin $c \times c \times c \times$ …… n madrûba değin (madde 22) $b^{n} \times c^{n}$ olup ve $b^{2}c^{3}d$ kemmiyeti beşinci kuvvete rafʿî olundukta $b^{10}c^{15}d^{5}$ olur. Ve keza $-b^{m}$ kemmiyeti n kuvvete rafʿî olundukta $\pm b^{m\,n}$ olarak n kemmiyetinin zevci veya ferdi olduğuna nazaran işaretinin dahi zâʿid veya nakıs olması lazım gelir ve bu husus kâʿide-i cebriye üzere bu vechle $(-b^{m})^{n} = (-1)^{n} b^{m\,n}$ işʿâr olunur.
(56) Eğer rafʿî matlûb olan kemmiyet kesîr olur ise kesr-i mezkûrun sûretiyle mahreçi kuvvet-i matlûbaya rafʿî olunur (madde 48).
Nitekim, $(b / c)^{n} = b^{\mathrm{n}} / c^{n}$ kesrinde olduğu gibi.

(57) Eğer rafʿî matlûb olan kemmiyet kemmiyât-ı merkûbeden olur ise amel-i rafʿî bilfiil icrâ olunur. Yahud üssü mahsûsa iʿtâsıyla bilkuvve işʿâr olunur. Faraza $b + c$ zû'l-haddeynin herhangi kuvvete rafʿî murâd olunsa

$$\begin{array}{l} b + c \\ b + c \\ \hline b^2 + bc \\ \quad + bc + c^2 \\ \hline \end{array}$$

$(b + c)^2$ yahud $b^2 + 2bc + c^2$ murabbaʿ yahud ikinci kuvvet

$$\begin{array}{l} b + c \\ \hline b^3 + 2b^2c + bc^2 \\ \quad + b^2c + 2bc^2 + c^3 \\ \hline \end{array}$$

$(b + c)^3$ yahud $b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$ üçüncü kuvvet

$$\begin{array}{l} b + c \\ \hline b^4 + 3b^3c + 3b^2c^2 + bc^3 \\ \quad + b^3c + 3b^2c^2 + 3bc^3 + c^4 \\ \hline \end{array}$$

$(b + c)^4$ yahud $b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4$ dördüncü kuvvet

ve hakeza kuvve-i sâireye dahi rafʿî olunur. Eğer c kemmiyeti menfî yani rafʿî matlûb olan zû'l-haddeyn $b - c$ olmuş olsa hâsıl-ı rafʿîda c kemmiyetinin ferdi kuvvetlerini hâvî olan hadler menfî ve zevci kuvvetlerini hâvî olan hadler müsbet olur. Bu takdirce

$(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$

$(b - c)^3 = b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$

$(b - c)^4 = b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4$

olup zû'l-haddeynin mâʿadâsî dahi buna kıyas olunur.

(58) Kuvvet-i matlûbeye rafʿî ile kemmiyet-i mʿalumayı hâsıl eden kemmiyetin istihsâli tarîkine cezr-i ahzı taʿbîr olunur. Farazâ, b^m kemmiyetinin b^{mn} kemmiyeti

nununcu kevveti ve b^{m} kemmiyeti dahi $b^{m\,n}$ kemmiyetinin nununcu kuvvetden cezri olmuş olup bundan zâhir olur ki herhangi bir kemmiyet-i müfredenin cezrini istihrâc için kemmiyet-i mezkûrenin üssü dâimâ kuvvet-i matlûba üzerine taksîm olunur.

(59) İmdi cezr-i matlûb olan kemmiyetin üssü cezri işʿâr eden adet ile tamamen kâbil-i inkısâm değil ise cezr-i matlûb bilfiil ahz olunamayarak on ikinci maddede tʿarif olunduğu üzere yalnız işʿâr olunur.

Şöyle ki, $b^{2} + x^{2}$ zû'l-haddeynin cezr-i murabbaʿ ve cezr-i mikaʿbı ve dördüncü kuvvetden cezrî ve nununcu kuvvetden cezrî ale'l-tevali işbu $(b^2 + x^2)^{1/2}$ ve $(b^2+x^2)^{1/3}$ ve $(b^2+x^2)^{1/4}$ ve $(b^2+x^2)^{1/n}$ kemmiyetleriyle işʿâr olunup $1/\ b^2+x^2$ yahud $(b^2+x^2)^{-1}$ kemmiyetinin dahi cezr-i müteʿaddidesi işbu $(b^2+x^2)^{-1/2}$ ve $(b^2+x^2)^{-1/3}$ ve $(b^2+x^2)^{-1/4}$ ve $(b^2+x^2)^{-1/n}$ kemmiyetleriyle işʿâr olunur.

(60) Eğer bir kemmiyetin cezrî ferd kuvvedden ahz olunur ise hâsıl-ı cezrin işâreti (madde 54) zâhir olunduğu üzere kemmiyet-i mefrûdanın işâretinin aynı olur. Meselâ, $\sqrt[3]{8} = 2$ olup ve $\sqrt[3]{-8} = -2$ olur. Ve kıs ʿalâ haza

(61) Eğer ahzı matlûb olan cezr zevc kuvvetden ise hâsıl-ı cezr işâretlerinin ikisini dahi kâbil olur. Zirâ bir kemmiyet zâʿid olsun veya nâkıs olsun zevç kuvvete rafʿî olundukta hâsıl-ı rafʿî zâʿid olur. Şöyle ki, $\sqrt{b^2} = \pm\, b$ ve $\sqrt[4]{(b+c)^8} = \pm\,(b + c)^2$ olur.

(62) Eğer cezr-i mefrûd zevç bir adet ile işʿâr olunarak cezr-î matlûb olan kemmiyet-i mefrûdanın işâratı dahi menfî olur ise cüz-ü mezkûrun ahzı mümkün değildir. Zirâ zevç kuvvete rafʿî olunarak menfî ihdâs eder. Hiçbir kemmiyet olmadığından bu nev ʿî kemmiyâta kemmiyât-ı muhdise ve muhterʿa ıtlâk olunur.

(63) Kemmiyât-ı cebriyenin hâsıl-ı darbları cezrinin ahzı madrûblarından her birinin cezrî ahz olunarak işbu meczûratı birbirleriyle darb olunmakla olur.

Meselâ, $(b\,c)^{1/n} = b^{1/n} \times c^{1/n}$ zirâ (madde 55) işbu madruplardan her biri nununcu kuvvete rafʿî olundukta hâsıl-ı rafʿî $b\,c$ olmuş olur.

Netice, eğer $b = c$ olsa $b^{1/n} \times b^{1/n} = b^{2/n}$ olup

ve keza $b^{x/n} \times b^{r/n} = b^{x+r/n}$ olur.

(64) Herhangi bir kesrin cezr-i sûretiyle mahreçinin cezirlerinin ahzı ile olur. Yani sûretin cezri sûret ve mahreçin cezri mahreç kalınmakla olur.

Şöyle ki, b^{2} / c^{2} kesrinin cezr-i mikaʿbı $b^{2/3} / c^{2/3}$ yahud

$b^{2/3}$ x $c^{-2/3}$ olup ve $(b / c)^{1/n} = b^{1/n} / 1/c^{n}$ yahud $b^{1/n}$ x $c^{-1/n}$ olur.

(65) Bir kemmiyet-i merkûbenin cüz-ü murabbaʿ nı istihrâc mûrad olundukta evvelâ $b^2 + 2bc + c^2$ zû hudûd selasesinin cezr-i murabbaʿ (madde 57) b ile c kemmiyetlerinin her bir kıymeti için $b + c$ olmağın işbu $b^2 + 2bc + c^2$ zû hudûd selaseden b ile c kemmiyetlerinin nevchile tahsîl olunabildiğine dikkat olunarak cezr-i murabbaʿ ahzı için bir kâʿide-i umûmi tahsîl olunabilir.

Şöyle ki, bâlâda zikr olunan zû hudûd kesîre b kemmiyetinin kuvvetlerine nazaran bu vechle bʿade'l-tanzîm

$b^2 + 2bc + c^2 \;(b + c$

b^2

$2bc + c^2$

$2bc + c^2 \;(2b + c$

hadd-ı evvel olan b murabbaʿnın cezri b olarak cezr-i matlûbun hadd-ı evveli b olup işbu hadd-ı evvelin murabbaʿ zû hudûd mefrûdadan tarh olunup bâkî kalan $2bc + c^2$ bir hat kesidesiyle tahtına tahrîr olunur. Bʿade işbu bâkînin hadd-ı evveli olan $2bc$ kemmiyeti cezr-i matlûbun hadd-ı evvelinin iki misli olan $2b$ üzerine taksîm birle haric-i kısmet olan c kemmiyeti cezr-i mezkûrun hadd-ı sânisi olur. Hadd-ı evvelin iki misliyle hadd-ı sâni mecmûʿ olan işbu $2b + c$ zû'l-haddeyni hadd-ı sâni olan c kemmiyetiyle darb olunup hâsıl-ı darb olan işbu $2bc + c^2$kemmiyet-i bâkîden tarh olunur. Eğer cezr-i matlûb olan kemmiyetde üçden ziyade had bulunur ise evvela $b + c$ kemmiyeti b kemmiyetinin kıymet-i âhirî gibi tasavvur olunup murabbaʿ olan işbu $b^2 + 2bc + c^2$ kemmiyet bâlâda icâr olunan ʿamelin cüz-ü evvelinde olduğu misillü bâkî-i mezkûrdan tarh olunup işbu tarhdan kalan bâkî $b + c$ kemmiyetinin iki misli üzerine taksîm olunarak hâriç-i kısmet cezr-i merkûmun hadd-ı ahirî olmuş olur.

Sâniyen cezr-i mezbûrun akdemce tahsîl olunan iki hadd-i mecmûʿnın iki misliyle işbu hadd-ı ahiri cemʿ olunup işbu mecmûʿ hadd-ı ahiri ile darb olundukta hâsıl-ı darb matrûh-u cedîd olur. Ve bu ʿamel cezr-i sahîhin veyâ cezr-i takribinin tahsîline değin tekrar olunur.

Misâl 1 işbu $b^2 + 2bc + c^2 + 2bd + 2cd + d^2$

zû hudûd-u kesîrenin cezr-i murabbaʿ murâd olunsa zû hudûd-u kesîre b harfinin kuvvetlerine nazaran tanzim olunarak $b^2 + 2(c + d)b + c^2 + 2cd + d^2$ olup bâlâda beyan olunan kâ ʿide bir veche âtî icrâ olunur.

$b^2 + 2(c + d)b + c^2 + 2cd + d^2 \; (b + (c + d)$

b^2

$2(c + d)b + c^2 + 2cd + d^2 \; 2b + (c + d)$

$2(c + d)b + c^2 + 2cd + d^2$

Bu takdirce cezr-i matlûb $b + c + d$ olmuş olur.

Misâl 2 işbu $b^2 - bx + x^2/4$ zû hudûd-u selasesinin cezr-i murabbaʿ matlûbdur.

$b^2 - bx + x^2/4 \;\; (b - x/2$

b^2

$-bx + x^2/4 \;\; (2b - x/2$

$-bx + x^2/4$

Cezr-i matlûb $b - x/2$ olup matlûbu hâsıl olur.

Misâl 3 işbu $1 + x$ zû'l-haddeynin cezr-i murabbaʿnın istihrâcı matlûbdur.

$1 + x \;\; (1 + x/2 - x^2/8 + \text{lh}$

1

$x \qquad\qquad 2 + x/2$

$x + x^2/4$

$-x^2/4 \qquad 2 + x - x^2/8$

$-x^2/4 - x^3/8 + x^4/64$

$\qquad\qquad x^3/8 - x^4/64 \;\; \text{lh}$

Netice eğer herhangi $b + c$ zû'l-haddeynnin cezr-i murabbaʿ matlûb olsa çünkü $b + c = b(1 + c/b)$ olmağın $\sqrt{b + c} = \sqrt{b}\sqrt{1 + c/b}$ (madde 63) akdemki misâlde x mahaline c/b vazʿ ile $\sqrt{1 + c/b} = 1 + c/2b - c^2/8b^2 + \text{lh}$

$\sqrt{b + c} = b^{1/2} + c/2b^{1/2} - c/8b^{3/2} + \text{lh}$

(66) İkinci misâlden zâhir olduğu üzere $b^2 - b\,x + x^2 / 4$ misillü herhangi bir zû hudûd selaseden vasat-ı murabbaʿ hadd-ı evvel ile hadd-ı ahir hâsıl-ı darbının dört misline müsâvî olsa zû hudûd selase-i mezkûre murabbaʿ tam olmuş olur.

(67) Cezr-i mikaʿb ahzi için kâʿide dahi cezr-i murabbaʿ ahzında olduğu misillü olup şöyle ki, $b^3 + 3\,b^2\,c + 3\,b\,c^2 + c^3$ zû hudûd-u erbaʿının cezr-i mikaʿbı $b + c$ olduğu (57 ve 58) maddelerinden zâhir olmağın işbu zû hudûd erbaʿıdan $b + c$ kemmiyetinin istihrâcı matlûb olsa kemâ fi'ʼs-sâbık tanzim olunup hadd-ı evvel olan b^3 miktarının cezr-i mikaʿbı b olmağın cezrin hadd-ı evveli olmuş olur. Bʿade işbu hadd-ı evvelin mikaʿbı zû hudûd mezkûreden tarh olunup bâkiyenin hadd-ı evveli $3\,b^2$ üzerine taksîm birle hâriç-i kısmet olan c cezr-i merkûmun hadd-ı sânisi olarak bâkîye-i mezkûreden $3\,b^2\,c + 3\,b\,c^2 + c^3$ kemmiyeti tarh olundukta hiçbir şey bâkî kalmamakla cezr-i mezkûrun $b + c$ olduğu nümâyân olur. Ve eğer işbu ikinci tarhdan dahi bir şey bâkî kalır ise $b + c$ cezri b makamında farz olunup bâkî-i mezkûrun hadd-ı evveli işbu $3\,(b + c)^2$ üzerine taksîm olunarak cezr-i mezkûrun hadd-ı sâlisi hâsıl olup ve bu minvâl üzere hudûd-u sâire dahi tahsîl olunup matlûb sâbit olur.

Misâl 1 $8\,x^3 + 6\,x\,y^2 - 12\,x^2\,y - y^3$ zû hudûd-u kesîresinin cezr-i mikaʿbı matlûbdur.

$8\,x^3 + 6\,x\,y^2 - 12\,x^2\,y - y^3$ ($2\,x - y$

$b^2 = 8\,x^3$

$- 12\,x^2\,y + 6\,x\,y^2 - y^3$ ($3\,b^2 = 12\,x^2$

$- 12\,x^2\,y \quad = 3\,b^2\,c$

$+ 6\,x\,y^2 \quad = 3\,b\,c^2$

$- y^3 \quad = c^3$

bu takdirce cezr-i mikaʿbı matlûb $2\,x - y$ olmuş olur.

3.2.10. ꙮ Kemmiyât-ı asame beyanındadır. ꙮ

(68) Muntak olan bir kemmiyeti asam-ı hey'etine idhâl için kemmiyet-i merkûma cezr-i asami işʿâr eden kuvvete rafʿî olunup evveline 'alâmet-i asam vaz'ı olunur.

Nitekim, $b = \sqrt{b^2} = \sqrt[3]{b^3}$ ve $b + x = (b + x)^{m/m}$ kemmiyetlerinde olduğu gibi ve bu tarîk ile herhangi bir kemmiyet asam-ı hey'eti tahvil olunabilir.

Şöyle ki, $(b + x)^{1/2} = (b + x)^{2/4} = (b + x)^{3/6}$ ve hakeza olur. Çünkü kemmiyât-ı muhtelife kuvvey-i müteaddideye rafʿî olunup b'ade kuvvey-i mezkûreden cezirleri ahz olunmakla kemmiyât-ı merkûmenin kıymetleri asla tebdîl olunmaz.

(69) Herhangi bir kemmiyet-i asâmın emsâli (madde 63) mevcubunca bir hey'et-i asameye ircâʿ olunup bʿade kemmiyet-i asame ile darb olunarak 'alâmet-i asame tahtına idhâl olunabilir.

Emsile $b\sqrt{x} = \sqrt{b^2} \times \sqrt{x} = \sqrt{b^2 x}$

$b\, y^{3/2} = (b^2 y^3)^{1/2}$

$x\sqrt{2\,b - x} = \sqrt{2\,b\,x^2 - x^3}$

$b \times (b - x)^{3/2} = \{ b^2 \times (b - x)^3 \}^{1/2}$

$4\sqrt{2} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{32}$

(70) Ve bilakis alâmet-i asame tahtında bulunan bir kemmiyet, kemmiyet-i asameye emsâl kılınabilir. Ancak kemmiyet-i mezkûre cezr-i asami işʿâr eden kuvvete rafʿî olunup hâsıl-ı rafʿî ile alâmet-i asame tahtında vâkıʿ her bir had taksîm olunmak mümkün ola. Şöyle ki,

$\sqrt{b^2 - b\,x} = b^{1/2}\sqrt{b - x}$ ve $\sqrt{b^3 - b^2 x} = b\sqrt{b - x}$ ve

$(b^2 - x^2)^{1/n} = b^{2/n}(1 - x^2 / b^2)^{1/n}$ ve $\sqrt{60} = \sqrt{4 \times 15} = 2\sqrt{15}$ ve

$(1 / c^2 - 1 / b^2)^{1/2} = 1 / c \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}$ olur.

3.2.11. ❁ Kemmiyât-ı asamenin cemʿı ve tarhî beyanındadır. ❁

(71) İmdi kemmiyât-i asamenin asam olan kısımları yani cezriye tahtında bulunan cüz'leri müsâvî olsalar onların mecmûʿları ve beynlerinde olan tefâzul emsâlleri mecmûʿlarının yahud emsâlleri beyninde olan tefâzulün evveline kısmı asam vazʿı olunmakla tahsîl olunur.

Şöyle ki, $b\sqrt{x} \pm c\sqrt{x} = (b \pm c)\sqrt{x}$

$10\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$ yahud $5\sqrt{3}$ olur.

Eğer kemmiyât-ı asame-i mefrûdenin kısm-ı asameleri birbirine müsâvî değil ise kemmiyât-ı mezkûre bazen kemmiyât-ı asame-i sâireye ircâʿ olunabilir ki cüz-ü asameleri birbirine müsâvî olur.

Farazâ $\sqrt{3\,b^2c}$ ve $\sqrt{3\,c}$ kemmiyetlerinin mecmû'ıları murâd olunsa

$\sqrt{3\,b^2c} = \sqrt{b^2} \times \sqrt{3\,c} = b\,\sqrt{3\,c}$ olmağın

$\sqrt{3\,b^2c} + \sqrt{3\,c} = b\,\sqrt{3\,c} + \sqrt{3\,c} = (b + 1)\,\sqrt{3\,c}$ olur.

Eğer kemmiyât-ı asame-i mefrûde kısm-ı asameleri birbirine müsâvî olan kemmiyât-ı sâireye ircâʿ olunmak mümkün değil ise kemmiyât-ı merkûme beynlerine fakat + ve – alâmetlerinin tahrîriyle iktifâ kılınır.

3.2.12. ❁ Kemmiyât-ı asamenin darbı beyanındadır. ❁

(72) Eğer iki kemmiyet-i asamın cezriye üsleri mümâsil olsa onların hâsıl-ı darbı cezriye tahtında vâkıʿ kemmiyetlerin hâsıl-ı darbına müsâvî olup ve cezriyesi dahi kemmiyeteyn-i mezkûreteynin cezriye-i müşterekesi olmuş olur.

Şöyle ki, $\sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} = b^{1/n} \times c^{1/n} = (b\,c)^{1/n}$ (madde 63) $= \sqrt[n]{b\,c}$

$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

$(b + c)^{1/2} \times (b - c)^{1/2} = (b^2 - c^2)^{1/2}$

$\sqrt[3]{b + x} \times \sqrt[3]{b - x} = \sqrt[3]{b^2 - x^2}$ olur.

(73) Eğer kemmiyât-ı asamenin darblarında madrûb ile madrûb-u fihin emsâlleri bulunur ise işbu emsâllerin hâsıl-ı darbları ahz olunup kemmiyât-ı asamenin hâsıl-ı darbı evveline vaz' olunur.

Şöyle ki, $b\,\sqrt{x} \times c\,\sqrt{y} = b\,c\,\sqrt{x\,y}$ olduğu gibi.

(74) Eğer iki kemmiyet-i asamın üslerinin mahreçleri müşterek olsa kemmiyeteyn-i mezkûreteyn kendi üsleri sûretlerinin iş'âr eylediği kuvvetlere rafʿî olunup işbu kemmiyeteyn-i merkûmeteynin akdemki d'avâda olduğu misillü hâsıl-ı darbları istihrâc olunur.

Meselâ $2^{3/2} \times 3^{1/2} = 8^{1/2} \times 3^{1/2} = (24)^{1/2}$

Ve keza $(b + x)^{1/2} \times (b - x)^{3/2} = \{(b + x)\,(b - x)^3\}^{1/2}$ olur.

(75) Eğer iki asamın üsleri mahreçleri müşterek değil ise kemmiyeteyn-i mezkûreteyn kıymetleri müsâvî ve üslerinin mahreçleri müşterek olan kemmiyeteyn-i âharine tahvil olunup b'ade hâsıl-ı darbları (madde 74) misillü istihrâc olunur.

Misâl 1 $(b^2 - x^2)^{1/4} \times (b - x)^{1/2} = (b^2 - x^2)^{1/4} \times (b - x)^{2/4}$

$= \{ (b^2 - x^2) \times (b - x)^2 \}^{1/4}$

ve yine $2^{1/2} \times 3^{1/3} = 2^{3/6} \times 3^{2/6} = (8\times9)^{1/6} = (72)^{1/6}$ olur.

(76) Eğer iki kemmiyet-i asamın cezriye-i tahtında vâkı' cüz-ü muntakları birbirinin aynı olsa onların hâsıl-ı darbları kemmiyeteyn-i mezkûreteyn üsleri mecmû'ına ol kemmiyetlerden birinin rafʿîyla istihrâc olunur.

Şöyle ki, $\sqrt[n]{b} \times \sqrt[m]{b} = b^{1/n} \text{ x } b^{1/m} = b^{1/n + 1/m} = b^{m/mn + n/mn}$ (madde 68) $= b^{m+n/mn}$ olup işbu keyfiyet altmış üçüncü maddeden dahi zâhir olur.

Meselâ $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} = 2^{3/6+2/6} = 2^{5/6}$

3.2.13. ❁ Kemmiyât-ı asamenin taksîmi beyanındadır. ❁

(77) Eğer iki kemmiyet-i asamın üs mahreçleri müşterek olsalar onların hâric-i kısmetleri kemmiyeteyn-i mezkûreteynden heri biri kendi üs sûretinin iş'âr eylediği kuvvete rafʿî olunduktan sonra birbiri üzerine taksîm ve bʿade dahi üs mahreç müştereğinin irâe eylediği kuvvetden haric-i kısmetin cezri ahz olunmakla istihrâc olunur.

Şöyle ki, $b^{1/n} / c^{1/n} = (b / c)^{1/n}$ ve $b^{m/n} / \text{c}^{q/n} = (b^m)^{1/n} / (c^q)^{1/n} = (b^m / c^q)^{1/n}$ (madde 64) olup

meselâ $4^{1/2} \div 2^{3/2} = (4/8)^{1/2} = 1/\sqrt{2}$

$(q / l)^{1/\text{m}} \div (r / x)^{2/\text{m}} = (q x^2 / l r^2)^{1/\text{m}}$ olur.

(78) Eğer iki kemmiyet-i asamının üs mahreçleri müşterek değil ise kemmiyeteyn-i mezkûreteyn kıymetleri müsâvî ve üs mahreçleri müşterek olan kemmiyeteyn-i aharine nakl olunup ke'l-evvel amel-i taksîm icrâ olunur.

Meselâ $(b^2 - x^2)^{1/2} \div (b^3 - x^3)^{1/3} = (b^2 - x^2)^{3/6} \div (b^3 - x^3)^{2/6}$

$= \{ (b^2 - x^2)^3 / (b^3 - x^3)^2 \}^{1/6}$

(79) Eğer iki kemmiyet-i asamın cezriye-i tahtında vâkı'a kısmı muntakları birbirinin aynı olur ise onların haric-i kısmetleri kemmiyeteyn-i mezkûreteyn üsleri beyninde olan tafâzule ol kemmiyetlerden birinin rafʿîyla istihrâc olunur.

Şöyle ki, $b^{1/n}$ kemmiyetinin $b^{1/m}$ kemmiyeti üzerine taksîmi yahud $b^{m/nm}$ kemmiyetinin $b^{n/nm}$ kemmiyeti üzerine taksîmi yani $b^{m/nm} / b^{n/nm}$ kemmiyeti

$b^{\,n-m/nm}$ kemmiyetine müsâvîdir. Zirâ işbu kemmiyeteyn m n kuvvete rafʿî ile hâsıl-ı rafʿîlar b^{m} / b^{n} ve b^{n-m} olarak birbirine müsâvî olmuş olur.
Meselâ, $2^{1/2} : 2^{1/3} = 2^{3/6} : 2^{2/6} = 2^{1/6}$ olduğu gibi

3.2.14. ❁ Kemmiyât-ı asamenin rafʿî ve teczîrleri beyanındadır. ❁

(80) Bir kemmiyet-i asamenin herhangi kuvvete rafʿî üs asame kuvvet-i matlûba ile darb olunarak istihrâc olunur.
Şöyle ki, $(\sqrt[n]{b}\,)^{m} = (b^{1/n})^{m} = b^{1/n+1/n+1/n+\ldots\ldots\ldots\ldots m}$ hadda kadar $b^{m/n}$ olur.
(81) Bir kemmiyet-i asamın herhangi kuvvetden cezri üssü asame kuvvet-i matlûba üzerine taksîm olunarak istihrâc olunur.
Şöyle ki, $\sqrt[m]{(n\sqrt{b}\,)} = \sqrt[m]{b}^{\;1/n} = b^{\,1/n\,m}$ olur. Zirâ işbu iki kemmiyetlerden her biri m kuvvete rafʿî olundukta hâsıl-ı rafʿîler birbirine müsâvî olmuş olur. Bundan zâhir olur ki kemmiyât-ı asame hakkında bu mahale değin vazʿı ve te'sis olunan kavâʿîd-i müteaddide kuvvay-ı meksûreye rafʿî olunmuş olan kemmiyât hakkında dahi cârî demek olur.

3.2.15. ❁ Kemmiyât-ı asamenin tahvîli beyanındadır. ❁

(82) Cezr-i murabba' hâvî i'tâ olunan herhangi bir kemmiyetden kemmiyet-i âharın istihrâcı matlûbdur ki, işbu kemmiyet-i sâni kemmiyet-i evvel ile darb olundukta hâsıl-ı darb bir kemmiyet-i muntak ola.
Evvela eğer i'tâ olunan kemmiyet $3\sqrt{b}$ misillü bir asam-ı müfred ise madrûb-u matlûb $\sqrt{b}$ olup hâsıl-ı darb dahi muntak olarak $3\,b$ olmuş olur.
Sâniyen eğer i'tâ olunan kemmiyet $\sqrt{b} + \sqrt{c}$ misillü zû asameyn ise madrûb-u matlûbu $\sqrt{b} - \sqrt{c}$ olup hâsıl-ı darb dahi $b - c$ olmuş olur.
Sâlisen eğer zikr olunan kemmiyet $\sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ misillü zû asame selase ise evvela $\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d}$ ile darb olunarak $(\sqrt{b} + \sqrt{c}\,)^2 - (\sqrt{d}\,)^2$ yahud $b + c - d + 2\sqrt{b\,c}$ hâsıl olup b'ade işbu hâsıl $b + c - d - 2\sqrt{b\,c}$ ile darb olundukta hâsıl-ı darb $(b + c - d\,)^2 - 4\,b\,c$ olarak madrûb-u matlûb $(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d}\,) \times (b + c - d - 2\sqrt{b\,c})$ olduğu zâhir olur. Ve bu d'avanın ist'imaliyle mahreçleri asame olan küsûrâtın kıymetleri bi's-sühûle takdir ve t'ayin olunabilir.

Şöyle ki, farazâ $1 / \sqrt{3} + \sqrt{2}$ kesrinin yedi hâne a'şâre değin kıymet-i takribesini istihrâc zımmında 2 ile 3 adetlerin cezr-i murabbaʿları ahz olunup işbu cezirlerin mecmûʿ üzerine vâhid taksîm olunsa merâm hâsıl olur ise de icrâ olunan ʿamel uzun ve düşvar olduğundan zikr olunan kâʿîdeye tatbiken kesr-i mezkûrun evvela sûretiyle mahreçi $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ile darb olunarak $\sqrt{3} - \sqrt{2} / 3–2$ yahud $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ hâsıl olup 3 ile 2 adetlerin cezr-i murabba'ları ahz olunup meczurları birbirinden tarh olundukta matlûb hâsıl olup ʿamel-i taksîm gailesinden dahi külliyen biri olunmuş olur.

Ve keza, $\sqrt[3]{2} / \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3}$ x $\sqrt[3]{3} / (\sqrt[3]{3})^3 = \sqrt[3]{18} /3$

Ve $\sqrt[r]{b} / \sqrt[r]{c} = (b^{1/r} \times c^{1-r/r}) / (c^{1/r} \times c^{1-r/r}) = \sqrt[r]{b\, c^{r-1}} / c$

İşbu kesrinden her biri sühuletle hesap olunmak için bu vechle ihtisâr olundu. Ve ʿale'l-umûm

(83) Hadd-ı vâhidî yahud haddeyn-i asam olan herhangi bir zû'l-haddeyni muntak kılmak için madrûb-u istihrâcı matlûbdur.

Evvela x ve y kemmiyetlerinden biri yahud ikisi dahi asam olarak x + y bir zû'l-haddeynin iraesini farz ve m dahi şol bir adet ola ki x^m ve y^m kemmiyetlerinden her biri muntak ola. Bu takdirce

$x^m \pm y^m = (x+y)\,(x^{m-1} - x^{m-2}y + \ldots\ldots \pm x\,y^{m-2} \pm y^{m-1})$

olup m adedi ferd olduğuna göre işârat-ı fevkânî ahz olunup zevç olduğuna göre işârat-ı tahtânî ahz olunarak zikr olunan zû'l-haddeyni muntak kılmak için madrûb-u matlûb $x^{m-1} - x^{m-2}y + \ldots\ldots \pm x\,y^{m-2} \pm y^{m-1}$ olmuş olur.

Sâniyen zû'l-haddeyn mezkûreyn x – y olup ve m adedi ke'l-evvel farz olundukta otuz üçüncü maddenin beşinci misâlinde olduğu misillü

$x^m - y^m = (x-y)\,(x^{m-1} + x^{m-2}y + \ldots\ldots. + x\,y^{m-2} + y^{m-1})$

olup bu bâbda dahi madrûb-u matlûb $x^{m-1} + x^{m-2}y + \ldots\ldots. + x\,y^{m-2} + y^{m-1}$ olmuş olur.

Misâl 1 $\sqrt{5} - \sqrt[3]{6}$ zû'l-haddeyni muntak kılmak için madrûb-u istihrâcı matlûb oldukta bu makamda m = 6 olmağın madrûb-u matlûb

$= (\sqrt{5})^5 + (\sqrt{5})^4 \times \sqrt[3]{6} + (\sqrt{5})^3 \times (\sqrt[3]{6})^2 + (\sqrt{5})^2 \times (\sqrt[3]{6})^3 + \sqrt{5} \times (\sqrt[3]{6})^4 + (\sqrt[3]{6})^5$

$= 25\sqrt{5} + 25\sqrt[3]{6} + 5\sqrt{5} + (\sqrt[3]{6})^2 + 30 + 6\sqrt{5} \times \sqrt[3]{6} + 6(\sqrt[3]{6})^3$ olup matlûb hâsıl olur.

(84) Bir kemmiyetin cezr-i murabbaʿ kısmen muntak ve kısmen asam-ı murabbaʿ olamaz. Farazâ $\sqrt{n} = b + \sqrt{m}$ olsun. İşbu kemmiyeteyn-i mütesâveteyn terbiʿ

olundukta $n = b^2 + 2b\sqrt{m} + m$ olup (müteʿârife 3) ve $2b\sqrt{m} = n - b^2 - m$ olmağın (müteʿârife 2) $\sqrt{m} = n - b^2 - m / 2b$ bir kemmiyet-i muntak olup bu ise farzımızın aksi olmuş olur.

(85) Eğer kısmen muntak ve kısmen asam olan herhangi iki kemmiyet birbirine müsâvî olsalar tarafeynde bulunan muntak kemmiyetler birbirine müsâvî olup ve keza asamlar dahi birbirine müsâvî olur.

Farazâ, $x + \sqrt{y} = b + \sqrt{c}$ olsa $x = b$ olup ve $\sqrt{y} = \sqrt{c}$ olur. Zirâ eğer x kemmiyeti b kemmiyetine müsâvî değil ise,

meselâ $x = b + m$ olsa bu takdirce $b + m + \sqrt{y} = b + \sqrt{c}$ yahud $m + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ olup $\sqrt{c}$ asamı kısmen muntak ve kısmen asam olması lazım gelir. Bu ise hilâfdır. (madde 84) bu sebepden $x = b$ ve keza $\sqrt{y} = \sqrt{c}$ olup matlûb sâbit olur.

(86) Eğer iki asam-ı murabbaʿ $\sqrt{x}$ ve $\sqrt{y}$ kısm-ı asamları birbirinin aynı olan asameyn-i âhareyne ircâʿları mümkün değil ise onların hâsıl-ı darbı asam olmuş olur. Zirâ, $\sqrt{x\,y} = r\,x$ farz olundukta $x\,y = r^2 x^2$ olup tarafeyn x kemmiyeti üzerine taksîm olundukta $y = r^2 x$ olmağın tarafeynin cezri ahz olundukta $\sqrt{y} = \sqrt{r^2 x}$ olup $\sqrt{y}$ ve $\sqrt{x}$ asamlarından her biri şol vechle ircâʿ olunabilir ki, kısm-ı asamları birbirine müsâvî ola bu ise farzımıza muhâlifdir.

(87) Bir kemmiyet-i asam meselâ, $\sqrt{x}$ kısm-ı asamları birbirinin aynı olmayan $\sqrt{m}$ ve $\sqrt{n}$ misillü diğer iki asamdan mürekkeb olamaz. Şöyle ki, $\sqrt{x} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$ farz olunsa işbu müsâvîler terbiʿ olundukta $x = m + n + 2\sqrt{m\,n}$ yahud $x - m - n = 2\sqrt{m\,n}$ olup muntak olan bir kemmiyet asam olan bir kemmiyete müsâvî olmuş olur.

(88) Bir had-ı asam-ı murabbaʿ ve diğeri muntak olan herhangi bir zû'l-haddeynin cezr-i murabbaʿ bazen bir zû'l-haddeyn âhariyle ifade olunabilir ki, hadlerinden biri yahud ikisi dahi asam-ı murabbaʿ olur.

Çünkü, $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 = x + y \pm 2\sqrt{x\,y}$ olmağın eğer zû'l-haddeyn olarak farz olunan herhangi bir kemmiyet-i asam $x + y \pm 2\sqrt{x\,y}$ tarzına vazʿ olunabilir ise asam-ı mezkûrun cezr-i murabbaʿ $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ olur. Ve bu keyfiyeti teharrî için asam-ı hâvî olan hadd-ı ahz ve madrûbuna hal olunarak $2\sqrt{x} \text{ x} \sqrt{y}$ olup hadd-ı mezkûrun bu vechle madrûbuna hali birkaç tarz ile mümkün ise de madrûblardan şol iki madrûb ahz oluna ki, onların mecmûʿî zû'l-haddeyn olan asam-ı mefrûzun muntak olan haddeyne müsâvî ola. Bu takdirce asam-ı mefrûzun cezri $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ olarak, eğer zû'l-haddeyn olan asam-ı mefrûzun işâratı zâʿid ise zâʿid ve nâkıs ise nâkıs işâretine ʿitibâr olunur.

Misâl 1

3 + $2\sqrt{2}$ zû'l-haddeynin cezr-i murabbaʿ matlûbdur. Bu babda $2\sqrt{2}$= $2\sqrt{2}$ x $\sqrt{1}$ olup ve keza 2 + 1 = 3 olmağın bu ecelden cezr-i matlûb 1 + $\sqrt{2}$ olmuş olur.

Misâl 2

7 – $2\sqrt{10}$ zû'l-haddeynin cezr-i murabbaʿ matlûbdur. Bu sûretde $2\sqrt{10}$ = $2\sqrt{5}$ x $\sqrt{2}$ olup ve keza 7 = 5 + 2 olmağın cezr-i matlûb $\sqrt{5}$ – $\sqrt{2}$ olmuş olur.

Misâl 3

İşbu 2 x + $2\sqrt{x^2-1}$ zû'l-haddeynin cezr-i murabbaʿ matlûbdur.

$2\sqrt{x^2-1}$ = 2 $\sqrt{x+1}$ x $\sqrt{x-1}$ ve keza x +1 + x –1 = 2 x olmağın cezr-i murabbaʿ matlûb $\sqrt{x+1}$ + $\sqrt{x-1}$ olur.

Misâl 4

İşbu 7 + $\sqrt{13}$ zû'l-haddeynin cezr-i murabbaʿ matlûbdur.

$\sqrt{13}$ = 2 $\sqrt{13/4}$ = 2 $\sqrt{13/4} \times \sqrt{1/2}$

Ve keza 13/2 + 1/2 = 7 olup cezr-i murabbaʿ matlûb ($\sqrt{13}$ + 1) /$\sqrt{2}$ olmuş olur.

Kaldı ki kemmiyât-ı asamının cezr-i murabbaʿlarının istihrâcî için umûmî olarak bir kaide-i külliye inşâallah teâla mahalinde zikr ve beyan olunur.

3.2.16. ❁ Kemmiyât-ı muhdise beyanındadır. ❁

(89) Eğer bir kemmiyet $\sqrt{-b}$ sûretinde bulunsa işbu hâlet bir gayrı mümküniyeti ifade eder. Çünkü sûret-i mezkûre menfî olan bir kemmiyetin cezr-i murabbaʿ demek olup bunun ise hâricde vücudu yoktur. Nitekim herhangi bir kemmiyet gerek müsbet olsun gerek menfî olsun kendi nefsine darb olundukta hâsıl-ı darb dâimâ müsbet olmakla bu misillü işârat hesap-ı cebriyeye idhâl olunsalar işârat-ı mezkûre kendilerine dair kavâid-i mahsûsaya muhtaç olup ve kavâid-i merkûmenin istiʿmâlinde dahi ziyade dikkat iktiza eder. Ve zikr olunan kemmiyât-ı muhdise kemmiyât-ı mevcute olmayıp

yalnız işârat olduğunu dâimâ zihinde hıfz etmek lazımdır. Ve eğer esnayı amelde bu misillü kemmiyât-ı mevhûmeye tesadüf olunur ise ve hususiyle dikkat olunacak mevâddidedir ki, $\sqrt{-b} \times \sqrt{-b}$ hâsıl-ı darbı (madde 72) ʿitâ olunan kaideye mutâbık olmayarak hâsıl-ı darb mezkûr – b olur. Zirâ $\sqrt{-b}$ kemmiyeti işbu – b kemmiyetinin cezrî demektir. Ve keza $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c}$ hâsıl-ı darbı $\sqrt{-b \times -c}$ yahud $\sqrt{b\,c}$ olduğundan $\sqrt{b} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{c} \times \sqrt{-1}$ yahud $\sqrt{b\,c}$ $(\sqrt{-1})^2$ yanî $-\sqrt{b\,c}$ olmuş olur.

Netice bundan zâhir olunur ki

$(x - b + \sqrt{-c^2})$ x $(x - b - \sqrt{-c^2}) = x^2 - 2\,b\,x + b^2 + c^2$ olur.

Kaldı ki, işbu kemmiyât-ı mevhûmenin kemmiyetçe hiçbir medlûl biri olmadığından kemmiyât-ı mezkûre ile tâlibinin ziyade iştigalleri bir vechle câiz değildir. Zirâ, kemmiyât-ı merkûmenin istiʿmâlleri ayrı ve tʿarifatının bahsi tavîl olup bu misillü resâil-i tʿalimiyede zikirleri münasib olmadığından bu mahalde itnâbdan ictinâb olunmuşdur.

3.2.17. ❁ Derece-i ûlâ muʿâdelâtî beyanındadır. ❁

(90) Eğer bir kemmiyet kemmiyet-i âhara yahud sıfıra müsâvî olup ve kâide-i cebir üzere işârât-ı mahsûsa vasıtasıyla işbu müsâvât ifade olunsa müsâvât -i mezkûreye muʿâdele tesmiye olunur. Şöyle ki, $x - b = c - x$ bir muʿâdele olup $x - b$ kemmiyeti muʿâdelenin bir tarafını $c - x$ kemmiyeti taraf-ı âharını teşkil eder.

(91) İmdi bir muʿâdelede bulunan kusûrat rafʿî olunduktan sonra muʿâdele-i mezkûrede mechûlün birinci kuvveti bulunur ise ol muʿâdeleye derece-i ûlâ muʿâdelesi ve murabbaʿ bulunur ise derece-i sâniye muʿâdelesi ve ale'l-umûm mechûlün kuvve-i ʿalâsı n olur ise n dereceden muʿâdele tesmiye olunur. Ve bir muʿâdelenin halli ol muʿâdelede bulunan mechûlün şol bir kıymetinin takdiridir ki muʿâdele-i merkûmede x mahaline işbu kıymeti vazʿ olundukta muʿâdelede müsâvât hâsıl ola.

(92) Bir muʿâdelede bulunan kemmiyât işâretlerinin tebdiliyle muʿâdelenin müsâvâtına halel gelmeksizin muʿâdele-i mezkûrenin bir tarafından taraf-ı âharına nakl olunabilir.

Farazâ $x + 10 = 15$ olsa tarafeynden 10 tarh olundukta $x + 10 - 10 = 15 - 10$ (müteʿârife 2) yahud $x = 15 - 10$ olur. Ve yine $x - 4 = 6$ olsa tarafeyne 4 cemʿ olundukta (müteʿârife 1) $x - 4 + 4 = 6 + 4$ yahud $x = 6 + 4$ olur.

Eğer $x - b + c = y$ olsa tarafeyne $b - c$ cemʿ olundukta $x - b + c + b - c = y + b - c$ yahud $x = y + b - c$ olur.

Netice bundan zâhir olur ki bir muʿâdelenin tarafeyninde bulunan hudûdun cümlesinin işâretleri tebdîl olunsa tarafeyn yine birbirine müsâvî olur.

Farazâ $x - b = c - 2x$ olsa tarafeyn nakl olundukta $-c + 2x = -x + b$ olup yahud $b - x = 2x - c$ olur.

(93) Eğer bir muʿâdelenin tarafeyninde bulunan her bir had herhangi bir kemmiyet ile darb olunsa hâsıl-ı darblar birbirine müsâvî olur (müteʿârife 3).

Netice bir muʿâdeleyi küsûrdan tahlis murâd olundukta her bir had ale'l-tevâli küsûrât-ı mezkûrenin mahreçleriyle darb olunur.

Farazâ, $3x + 5x / 4 = 34$ olsa her bir had 4 mahreç ile darb olundukta $12x + 5x = 136$ olup küsûrdan beri olmuş olur.

Bu takdirce bir muʿâdeleyi küsûrdan tahlis için muʿâdelenin tarafeyni küsûrât-ı mezkûrenin mahreçleri hâsıl-ı darbıyla darb olunur.

Meselâ, $x / 2 + x / 3 + x / 4 = 13$ olsa her bir had $2 \times 3 \times 4$ ile darb olundukta $3 \times 4 \times x + 2 \times 4 \times x + 2 \times 3 \times x = 2 \times 3 \times 4 \times 13$ olup
yahud $12x + 8x + 6x = 312$ olur.

(94)) İmdi bir muʿâdeleyi cezriyatdan tahlis murâd olunsa kemmiyât-ı meczûrayı hâvî hudûd-u muʿâdelenin bir tarafında bırakılub kemmiyât-ı bâkîye taraf-ı âhara nakl olunarak tarafeyn-i cezriye üssü kuvvetine rafiʿ olunur.

Şöyle ki, $\sqrt{b + x} - c = d$ olsa nakl ile $\sqrt{b + x} = c + d$ olup ve $b + x = (c + d)^2$ olur.

Eğer muʿâdelede + veyâ – alâmetiyle müttehid iki kemmiyet-i meczûra bulunur ise işbu icrâ olunan amel ikinci cezriye için tekrar olunur.

Şöyle ki, $\sqrt{b + x} + \sqrt{x} = c$ olsa nakl ile $\sqrt{b + x} = c - \sqrt{x}$ olup terbiʿ ile $b + x = c^2 - 2c\sqrt{x} + x$ olmakla tekraren nakl ile $2c\sqrt{x} = c^2 + b$ olarak terbiʿ ile $4c^2 x = (c^2 - b)^2$ olup cezriyatdan tahlis olunmuş olur.

(95) Eğer bir muʿâdelenin tarafeyni yalnız bir kemmiyet üzerine taksîm olunsa hâric-i kısmetler birbirine müsâvî olur.

Farazâ 17 $x = 136$ olsa $x = 136 / 17 = 8$ olur (müteʿârife 4)

(96) Eğer bir muʿâdelenin tarafeyni kuvvet-i vâhideye rafʿî olunsa hâsıl-ı rafʿîlar birbirine müsâvî olur. Farazâ $x^{1/2} = 9$ olsa $x = 9 \times 9 = 81$ olur. (müteʿârife 3)

Ve keza eğer tarafeynin bir kuvvetden cezri ahz olunsa meczûrlar birbirine müsâvî olur.

Farazâ $x = 81$ olsa $x^{1/2} = 9$ olur. (madde 58)

(97) Derece-i ûlâ muʿâdelesinin yalnız bir vechle halli olur yani mechûlün yalnız bir kıymeti vardır ki muʿâdelenin tarafeyninde mechûl mahaline ikâme olundukta emr-i müsâvâta halel gelmez. Zirâ derece-i evveliyeden olan her bir muʿâdele x mechûlüne nazaran $b\,x + c = 0$ tarzına ircâʿ olunabildiğinden mümkün olduğu sûretde mechûlü mezbûrun d ve e olarak iki kıymeti farz ve ve makamına ikame olunarak emr-i müsâvâta halel gelmemek üzere farz olunsa $b + c = 0$ olup ve yahud $b\,e + c = 0$ olarak $\therefore\; b\,d - b\,e = 0$ yahud $b\,(d - e) = 0$ olur. Lâkin b kemmiyeti sıfıra müsâvî olamaz. Eğer sıfıra müsâvî olsa bâlâda mefrûd şeklin muʿâdele olmaması lazım gelir. Bu takdirce $d - e = 0$ yahud $d = e$ olup d ve e kemmiyetlerinin muhtelif kıymetleri olamaz yahud x mechûlünün yalnız bir kıymeti vardır ki muʿâdelenin tarafeyninde x mahaline ikâme olundukta emr-i müsâvât hâsıl olur.

(98) Derece-i ûlâ muʿâdelesinde mechûlün kıymetini istihrâc etmek murâd olunsa evvela muʿâdele-i merkûma küsurdan ve cezriyâtdan tahlis ile mechûlü hâvî olan hudûd-u muʿâdelenin bir tarafına nakl olunup kemmiyât-ı maʿlûma dahi muʿâdelenin taraf-ı âharında bırakılarak tarafeyn-i mechûlün emsâli yahud emsâlleri mecmûʿna taksîm olundukta hâric-i kısmet mechûl-u mezkûrun kıymet-i matlûbesi olmuş olur.

Misâl 1

İşbu $3\,x - 5 = 23 - x$ muʿâdelesinde x mechûlünün kıymeti matlûbdur.

Nakl ile $3\,x + x = 23 + 5$ (madde 92) yahud $4\,x = 28$ taksîm ile $x = 28 / 4 = 7$ (madde 95)

Misâl 2

İşbu $x + x / 2 - x / 3 = 4\,x - 17$ muʿâdelesinde x mechûlü matlûbdur.

2 adet ile darb olundukta $2\,x + x - 2\,x / 3 = 8\,x - 34$

3 adet ile darb olundukta $6\,x + 3\,x - 2\,x = 24\,x - 102$

Nakl ile $6\,x + 3\,x - 2\,x - 24\,x = -102$ yahud $-17\,x = -102$

$17\,x = 102$ (netice madde 92)

$\therefore \quad x = 102 / 17 = 6$

Misâl 3

İşbu $1 / b + c / x = d$ muʿâdelesinden x mechûlü matlûbdur.

$1 + b\, c / x = d\, b$

$x + b\, c = d\, b\, x$

$x - d\, b\, x = - b\, c$

$d\, b\, x - x = b\, c$ (netice madde 92)

$(d\, b - 1)\, x = b\, c$

$\therefore \quad x = b\, c / (d\, b - 1)$

Misâl 4

$5 - x + 4 / 11 = x - 3$ x mechûlü matlûbdur.

$55 - x - 4 = 11\, x - 33$

$55 - 4 + 33 = 11\, x + x$

$84 = 12\, x$

$\therefore \quad x = 84 / 12 = 7$

Misâl 5

$x + (3\, x - 5 / 2) = 12 - (2\, x - 4 / 3)$ x mechûlü matlûbdur.

$2\, x + 3\, x - 5 = 24 - (4\, x - 8 / 3)$

$6\, x + 9\, x - 15 = 72 - 4\, x + 8$

$6\, x + 9\, x + 4\, x = 72 + 8 + 15$

$19\, x = 95$

$\therefore \quad x = 95 / 19 = 5$

Misâl 6

$\sqrt{b + x} + \sqrt{b - x} = 2\sqrt{x}$ x mechûlü matlûbdur.

$\sqrt{b + x} = 2\sqrt{x} - \sqrt{b - x}$

$b + x = 4\, x - 4\sqrt{b\, x - x^{2}} + b - x$

$4\sqrt{b\, x - x^{2}} = 2\, x$

$2\sqrt{b\, x - x^{2}} = x$

$4\, b\, x - 4\, x^{2} = x^{2}$

$4\, b\, x = 5\, x^{2}$

$4\,b = 5\,x$

$\therefore \; x = 4\,b / 5$

Misâl 7

$\sqrt[m]{b+x} = \sqrt[2m]{x^2 + 5\,b\,x + c^2}$ x mechûlü matlûbdur.

Tarafeyn 2 m kuvvetine rafʿî olunarak

$(b+x)^2 = x^2 + 5\,b\,x + c^2$ yahud

$b^2 + 2\,b\,x + x^2 = x^2 + 5\,b\,x + c^2$

$3\,b\,x = b^2 - c^2$

$\therefore \; x = b^2 - c^2 / 3\,b$

(99) İmdi kavâid-i merʿıyyeden bir düstûr-u ʿumûmi olup muʿâdelât halinde gayet müstʿamel olmakla bu mahalde zikrî münasib görülmüşdür.

Şöyle ki, herhangi $b\ c\ d\ e$ kemmiyetleri beyninde $b/c = d/e$ olsa

$b + c / b - c = d + e / d - e$ olup ve $b - c / b + c = d - e / d + e$ olur. Zirâ bu maddeyi ispat için $b/c = d/e$

$\therefore \; b/c + 1 = d/e + 1$

yahud $b + c / c = d + e / e$

ve yine $b/c - 1 = d/e - 1$

yahud $b - c / c = d - e / e$

$\therefore \; b + c / c \div b - c / c = d + e / e \div d - e / e$

yahud $b + c / b - c = d + e / d - e$

Netice bu misillü ispat olunabilir ki $b - c / b + c = d - e / d + e$ dahi olur.

Netice işbu düstûrun bir taraf adet-i sahîh olan muʿâdelâta tatbiklerinde adet-i sahîh mezkûr mahreci vâhid olarak bir kesîr gibi ʿitibar olunur. Ve düstûr-u mezkûr lafzan yani eğer iki kesîr birbirine müsâvî olsalar birinin sûretiyle mahreci mecmûʿnın beyninde olan tefâzulle taksîmi diğerinin sûretiyle mahreci mecmûʿnın beyninde olan tefâzulle taksîmine müsâvîdir. Deyû beyne'l-tâlibeyn hıfz etmeleri lâzımadandır.

Misâl 1

$x + 2 / x - 2 = 7 / 5$ muʿâdelesinde x mechûlünün kıymeti matlûbdur.

düstûr-u mezkûre tatbiken $2\,x / 4 = 12 / 2$ yahud $x / 2 = 6$

$\therefore \; x = 12$

Misâl 2

$\sqrt{b} + \sqrt{b-x}$ / $\sqrt{b} - \sqrt{b-x}$ = 1 / b x mechûlü matlûbdur.

Kezalik düstûr-u mezkûre tatbiken $2\sqrt{b}$ / 2 $\sqrt{b-x}$ = 1+ b /1– b yahud $\sqrt{b/b-x}$ = 1+ b /1– b işbu müsâvî kemmiyetler terbiʿ olundukta

$b/b-x = (1+ b/1- b)^2$ yahud $b-x / b = (1-b/1+b)^2$ ve yahud

$1 - x / b = (1-b/1+b)^2$

$x / b = 1 - (1-2b+b^2) / (1+2b+b^2)$

$= 4b / (1+b)^2$

$\therefore$ $x = 4b^2 / (1+b)^2$

$x = (2b / 1+b)^2$

Misâl 3

$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ / $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}$ = 1/2 x matlûbdur.

düstûr ile $\sqrt[3]{x+1}$ / $\sqrt[3]{x-1}$ = 3/1 müsâvî kemmiyetler tekʿîb olundukta

$x + 1 / x - 1 = 27$ ve yine düstûr ile

$x = 28 / 26 = 1\frac{1}{13}$

(tenbîh) tarafeynde mechûl vâkıʿ olan muʿâdelâta bâlâda zikrî sebkat eden düstûrun ale'l-ʿumûm tatbiki câiz değildir. Çünkü bu tarîk ile muʿâdelenin bir tarafı ihtisâr olunmakla taraf-ı âhiri ekseriya muğlak kalıp hiçbir kaide hâsıl olmaz.

3.2.18. ۞ Meçhûlunü hâvî muʿâdelât beyanındadır. ۞

(100) Eğer münferid vâkıʿ olan iki muʿâdelede iki mechûl bulunsa muʿâdeleteyn-i mezkûreteyn zîrde beyan olunacak tarîk-ı selase ile mechûl vâhidî havi yalnız bir muʿâdeleye ircâʿ olunur. Tarîk-ı evvel muʿâdeleteynin birinde mechûllerden birinin kıymeti mechûl-ü sânî ve kemmiyât-ı maʿlûme vasıtasıyla tahsîl olunup muʿâdele-i âharde mahaline vazʿ olunarak muʿâdele-i sânîde yalnız bir mechûl bulunub kıymeti akdemce te'sis olunan kavâʿid iânesiyle istihrâc olunur.

Misâl

$x + y = 10$

$2x - 3y = 5$ x ile y mechûllerinin istihrâcî matlûbdur.

Birinci muʿâdeleden $x = 10 - y$ olup tarafeyn iki ile darb olundukta $2x = 20 - 2y$ olmağın ikinci muʿâdelede işbu 2 x kemmiyetinin müsâvîsi mahaline vazʿ olunarak $20 - 2y - 3y = 5$

$20 - 5 = 2y + 3y$

$15 = 5y$

$\therefore\ y = 15 / 5 = 3$

ve keza $x = 10 - y = 10 - 3 = 7$

tarîk-ı sânî muʿâdeleteynde mechûleynden birinin kıymetleri tayin olunup işbu kıymetler birbirine müsâvî kılınarak hâdis olan muʿâdeleden mechûl-u sânîyenin kıymeti istihrâc olunur.

Misâl

$x + y = b$

$c\,x + d\,y = e\,v$ ve x ile y mechûllerinin istihrâcî matlûbdur.

Birinci muʿâdeleden $x = b - y$ ve ikinci muʿâdeleden

$c\,x = e\,v - d\,y$

$x = e\,v - d\,y \,/\, c$

$\therefore\ b - y = e\,v - d\,y \,/\, c$

$c\,b - c\,y = e\,v - d\,y$

$d\,y - c\,y = e\,v - c\,b$

$(d - c)\,y = e\,v - c\,b$

$\therefore\ y = e\,v - c\,b \,/\, d - c$

ve keza $x = b - y = b - (e\,v - c\,b \,/\, d - c)$

$= d\,b - c\,b - e\,v + c\,b \,/\, d - c$

$= d\,b - e\,v \,/\, d - c$

tarîk-ı sâlise eğer muʿâdeleteynde mechûlünün birinin emsâlleri birinin aynı olup ve işâretleri dahi mümâsil ise muʿâdeleteyn birbirinden tarh ve işâretleri gayrı mümâsil ise birbirleriyle cemʿ olunarak mechûl-u mezkûr ifnâ olunur.

Misâl

$x + y = 15$

$x - y = 3$ x ile y mechûllerinin istihrâcî matlûbdur.

cemʿ ile $2x = 18$ ve $x = 9$ tarh ile $2y = 12$ ve $y = 6$

eğer ifnâ olunması murâd olunan mechûlün emsâlleri muhtelif ise muʿâdele-i evvelinin her bir haddî muʿâdele-i sânîyede bulunan emsaliyle darb olunup ve muʿâdele-i sânîyenin her bir haddî dahi muʿâdele-i evveliyede bulunan mechûlün emsaliyle darb olunarak hâsıl olan muʿâdeleteyn ke'l-evvel birbiriyle cemʿ yahud birbirinden tarh olunur.

Misâl 1

$3\,x - 5\,y = 13$

$2\,x + 7\,y = 81$

muʿâdele-i evvelinin her bir haddî 2 ile darb olunup ve muʿâdele-i sânîyenin her bir haddî 3 ile darb olundukta

$6\,x - 10\,y = 26$

$6\,x + 21\,y = 243$ birbirinden tarh ile $31\,y = 217$

$\therefore\ y = 7$

Vekeza $3\,x - 5\,y = 13$

$3\,x - 35 = 13$

$3\,x = 35 + 13 = 48$

$\therefore\ x = 48 / 3 = 16$

Misâl 2

$b\,x + c\,y = d$ x ile y mechûllerinin istihrâcî matlûbdur.

$m\,x - n\,y = e$

birinciden $m\,b\,x + m\,\mathrm{c}\,y = m\,d$

ikinciden $b\,m\,x - b\,n\,y = b\,e$

tarh ile $(m\,c + b\,n)\,y = m\,d - b\,e$

$\therefore\ y = m\,d - b\,e / m\,c + b\,n$

ve yine $n\,b\,x + n\,\mathrm{c}\,y = n\,d$

$m\,c\,x - c\,n\,y = c\,e$

cemʿ ile $(b\,n + m\,c)\,x = n\,d + c\,e$

$\therefore\ x = (n\,d + c\,e) / (b\,n + m\,c)$

Misâl 3

$(3\,x - 5\,y) / 2 + 3 = (2\,x + y) / 5$

$8 - (x - 2\,y) / 4 = x / 2 + y / 3$ x ile y mechûlü matlûbdur.

birinciden $3\,x - 5\,y + 6 = (4\,x + 2\,y) / 5$

$15\,x - 25\,y + 30 = 4\,x + 2\,y$

$15\,x - 4\,x - 25\,y - 2\,y = -30$

ikinciden $2x - x + 2y = 4x/2 + 4y/3 = 2x + 4y/3$

$96 - 3x + 6y = 6x + 4y$

$96 = 6x + 3x + 4y - 6y$

$9x - 2y = 96$

$11x - 27y = -30$

$99x - 22y = 1056$

$99x - 243y = -270$

$221y = 1326$

$\therefore\ y = 1326/221 = 6$

ve keza $9x - 2y = 96$

$9x - 12 = 96$

$9x = 96 + 12 = 108$

$\therefore\ x = 108/9 = 12$

(101) Eğer üç mechûl-ü hâvî birbirine gayrı tâbiʿ olarak üç adet muʿâdele bulunsa muʿâdelât selase-i mezkûreden herhangi ikisi akdemce zikr olunan kavâʿid mevcubunca yalnız iki mechûl-ü hâvî bir muʿâdeleye ircâʿ olunup bʿade muʿâdele-i selase ile muʿâdeleteyn evvelinden biri mechûleyn mezkûreyni hâvî âhar bir muʿâdeleye tahvil olunarak bu vechle hâdis olan iki muʿâdeleden mechûleyn-i bâkîyeyn istihrâc olunup mechûl-ü sâlise dahi muʿâdelât selase-i mefrûdanın birinden tahsîl olunur.

Misâl 1

$2x + 3y + 4z = 16$

$3x + 2y - 5z = 8$

$5x - 6y + 3z = 6$ evvelki iki muʿâdeleden

$6x + 9y + 12z = 48$

$6x + 4y - 10z = 16$

$5y + 22z = 32$ birinci ile üçüncüden

$10x + 15y + 20z = 80$

$10x - 12y + 6z = 12$ tarh ile

$27y + 14z = 68$

$5y + 22z = 32$ bu takdirce

$135y + 70z = 340$

$135\,y + 594\,z = 864$ tarh ile

$524\,z = 524$

$\therefore\ z = 1$

ve keza $5\,y + 22\,z = 32$

$5\,y + 22 = 32$

$5\,y = 32 - 22$

$\therefore\ y = 10 / 5 = 2$

ve yine $2\,x + 3\,y + 4\,z = 16$

yani $2\,x + 6 + 4 = 16$

$2\,x = 16 - 6 - 4 = 6$

$\therefore\ x = 3$

işbu kâʿide muʿâdelâtın adedince mechûlâtî hâvî muʿâdelât mütetâb'i-i müteʿaddideye tatbik olunabilir.

(102) Mechûlatın kıymeti mahdûdalarının tamamen takdir için mechûlat-ı mezkûrenin adedince muʿâdelât gayri mütetâb'ia iktiza edip mechûlatın adedi muʿâdelâtın adedinden ekal olduğu taktirde işbu mechûlâtdan biri muʿâdelât-ı muhtelifeden tahîl olundukta eğer mechûlün bu vechle istihsâl olunan kıymetleri muhtelif olurlar ise muʿâdelât-ı merkûme muʿâdelât-ı mücerrede olmuş olurlar. Ve eğer kıymet-i mezbûreler birbirinin aynı olurlar ise zikr olunan muʿâdelâtdan bazıları gayrı elzem olmuş olur. Kaldı ki, muʿâdelâtın adedi mechûlâtın adedinden ekal olsa mechûlât-ı mezkûreden birinin müsâvîsinde mechûlât-ı bâkîye bulunarak işbu mechûlât-ı bâkîyenin kıymetleri keyfe mâ ittifak farz olunur. Ve bu nevii mesâilin hallî vücûh-u müteaddideye kâbil olur.

Şöyle ki, $x + y = b$ muʿâdelesinde $x = b - y$ olmağın işbu mechûlüne keyfe mâ ittifak bir kıymet farz olunarak x mechûlünün dahi bir kıymeti tahsîl olunur ki $x + y = b$ olur.

Bâlâda zikri sebkat eden muʿâdelât birbirine gayrı tâbʿi olmalıdır yani birbirlerinden müstihrac olmamalıdır.

Farazâ, $x + y = b$ ve $2\,x + 2\,y = 2\,b$ muʿâdeleteyni gayrı mütetâb'i değildirler. Çünkü, muʿâdele-i sânîye muʿâdele-i evveleden müstihrac olarak kendisi bir farz muhtelifi hâvî olmayıb sıhhati dahi $x + y = b$ muʿâdelesinin sıhhatinden neş'et eder. Ve bʿazan muʿâdelâtın bu vechle tâbʿi yahud gayri tâbʿi olmalarını ve hele-i evvelide tefattun etmek asân değildir.

Şöyle ki işbu,

$x + 3y + 4z = 9$

$3x - 2y + 17z = 25$

$x + 14y - z = 11$

muʿâdelâtdan muʿâdele-i sâlisenin muʿâdeleteyn-i evvelinden müstihrâc olduğu yek nazarda mʿalum değildir. Lâkin muʿâdele-i evveli 4 adet ile darb olunup muʿâdele-i sâniyeden tarh olundukta muʿâdele-i sâlise hâsıl olur. Bu takdirce muʿâdelât selase-i mezkûreden x y z mechûllerinin takdir ve tayini için ânifen zikr olunan kâʿide işbu muʿâdelâta tatbik olundukta kâʿide-i merkûmenin bu bâbda cârî olmayacağı aşikâr olur.

3.2.19. ❁Derece-i evveli muʿâdelâtını ihdâs eden mesâil beyanındadır. ❁

(103) Bazı kemmiyât-ı mʿalume ile münasebeti olan kemmiyât mechûle-i âharinin teftiş ve tefahhus-u ameliyât cebriyeden olarak îrâd olunan bir meselenin halli murâd olundukta evvel emirde mesele-i mezkûrenin şerâit-i gereği gibi tezkîr ve tasvir olunup bʿade kemmiyât mechûle-i merkûmenin mahaline x ve y ve z harflerinden bazıları ikâme olunduktan sonra hâdis olan muʿâdelede mechûllere maʿlûmât-ı misillü nazar olunarak muʿâdele-i mezbûrenin câmʿi olduğu şerâitin hakikat ve adem-i hakikatini imtihan eder gibi ʿamel olunur. Ve mechûlât mefrûde-i bâkiyeden dahi bu vechle muʿâdelât-ı münfereden ihdâs edip bʿade işbu muʿâdelât muhdise hâl olunarak takdir ve tayini matlûb olan kemmiyât istihrâc olunmuş olur.

Mesele 1

b ve c ve d tâbyalarında bulunan neferâtdan b tâbyasında bulunan neferâtın adedi c tâbyasında bulunan neferâtın adedinin iki misli ve d tâbyasında bulunan neferâtın adedi b ile c tâbyalarında bulunan neferâtın adetleri mecmʿına müsâvî olduğu mʿalum olup ve işbu üç tabyaya tevzîʿ olunacak buğday 300 kilodan ibâret olmakla her bir tabyanın hissesine ne miktar kilo buğday isâbet edeceği matlûbdur.

Farazâ, x harfi c tabyasına isabet edecek buğdayın kilosunu işʿâr eylese $2x = b$ tabyasının hissesine işʿâr eder.

ve $x + 2x$ yani $3x = d$ tabyasının hissesi olmuş olur. Ve bu üç tâbyaya tevzîʿ olunacak buğday 300 kilo olmağın bu ecelden

$x + 2x + 3x = 300$

$6x = 300$

$\therefore\ x = 300/6 = 50$ kilo c tabyasının hissesi

$2x = 100$ kilo b tabyasının hissesi

$3x = 150$ kilo d tabyasının hissesi olur.

Mesele 2

Tûlâ 15 parmak olan bir hatt-ı müstakimin bir vechle iki kısma taksîmi matlûbdur ki, kısmından biri diğerinin üç rabiʿ ola

Faraza $4x$ = kısmından birinde bulunan adet-i parmak olup

$2x$ = ……………. diğerinde …………. olsa

$7x = 15$ meseleden münfehim olduğu üzere

$\therefore\ x = 15 / 7$

Bu takdirce $4x = 60 / 7 = 8\frac{4}{7}$ bir kısmı

$3x = 45 / 7 = 6\frac{3}{7}$ diğer kısmı

Mesele 3

Bir kale hendeğini b harfiyle işʿâr olunan kimesne 8 günde hafere edip ve c harfiyle işʿâr olunan kimesne 10 günde hafere itse işbu iki kimesne birlikde hafere itdikleri halde kaç günde tekmîl edecekleri matlûbdur.

Faraza x harfi matlûb olan adet-i eyyâmı irâe edip q dahi cismi hendeği işʿâr eylese b farz olunan kimesne bir günde zikr olunan hendeğin $l/8$ bir sümüneni yani $q/8$ kısmını hafere etmekte bu sebepden x günde ol kimesne $xq/8$ miktar hafere eyleyüb ve c farz olunan kimesne $xq/10$ miktar hafere etmiş olur. Bu sûretde

$xq/8 + xq/10 = q$

$x/8 + x/10 = l$

$10x + 8x = 80$

$18x = 80$

$\therefore\ x = 80 / 18 = 4\frac{8}{18} = 4\frac{4}{9}$ miktar yevm olmuş olur.

Mesele 4

Kilosu 12 kuruşa olan 50 kilo buğday ile kilosu 9 kuruşa olan darunun ne miktar halt olunmak lazımdır ki işbu mahlûtun beher kilosu 10 kuruşa ola. x matlûb olan darunun adet-i kilosu farz olunup

$9x$ = darunun pahası olan adet-i kuruşdur

600 = buğdayın pahası

$(50 + x)\,10$ = mahlûtun pahası

$\therefore \quad 9x + 600 = 500 + 10x$

$100 = x$ matlûb olan darunun adet-i kilosu olmuş olur.

Mesele 5

Bir serasker yanında mevcut kuruşu maʿiyetinde bulunan neferâta bahşiş olmak üzere iʿtâsını murâd edip eğer maʿiyetinde bulunan neferâtın adedi üç adet ziyade olsaydı beher nefer bir kuruş nâkıs ahz edecek imiş. Ve eğer neferât-ı merkûmenin adedinden iki nefer ekal ola idi beher nefer bir kuruş ziyade ahz edeceği maʿlum olarak neferât-ı merkûmenin adediyle beherinin hususuna isabet eden kuruşu istihrâc etmek matlûbdur.

x neferâtın adedi olup

y beher neferin ahz eylediği kuruş olsa

xy neferât-ı merkûmenin beynlerinde maksûm olan akçe olmuş olup

$(x + 3) \text{ x } (y - 1) = xy$ meseleden münfehim olduğu üzere

$(x - 2) \text{ x } (y + 1) = xy$

$\therefore\ xy - x + 3y - 3 = xy$ yahud $-x + 3y = 3$ ve

$xy + x - 2y - 2 = xy$ yahud $x - 2y = 2$

$\therefore \quad y = 5$ olup beher neferin ahz eylediği kuruş olur.

ve $x - 2y = x - 10 = 2$

$\therefore\ x = 12$ neferâtın adedi

3.2.20. ꙮ Derece-i sâniye muʿâdelâtı beyanındadır. ꙮ

(104) İmdi bir muʿâdelenin hudûd-u mechûlün yalnız murabbaʿ hâvî olsa mechûl-ü murabbaʿ mezkûrun kıymeti kavâʿid-i âtiye ile tahsîl olunup bʿade tarafeynin cezr-i murabbaʿları ahz olundukta mechûl-ü merkûm istihrâc olunur.

Misâl 1

$5\,x^2 - 45 = 0$ x mechûlünü istihrâc için nakl ile

$5\,x^2 = 45$

$x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{9} = \pm\,3$ (madde 96)

Mechûlün istihrâc olunan işbu kıymet-i evveline + ve – alâmetlerinin ikisi dahi vazʿ olunmuşdur. Zirâ bir kemmiyetin cezr-i murabbaʿ ya müsbet veya menfî olur (madde 61). Kalkı ki x mechûlünün alâmeti dahi menfî olabilir ise mechûl-ü mezkûr ke'l-evvel ya + 3 veya – 3 miktarına müsâvî olur.

Misâl 2

$b\,x^2 = c\,d\,e$

$x^2 = c\,d\,e\,/\,b$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{c\,d\,e\,/\,b}$

(105) Eğer münferid bir muʿâdelede mechûlün birinci ve ikinci kuvvetleri bulunsa muʿâdele-i mezkûrenin hudûdu mechûlün kuvvetlerine riayeten tanzim yani mechûlün kuvvet-i âlisine hâvî olan hadd-ı evvel kalıp bʿade kemmiyât-ı mʿaluma muʿâdelenin taraf-ı âharine nakl olundukta eğer mechûlün murabbaʿında emsâl rakamı bulunsa muʿâdele-i mezkûrenin cemʿ hudûdu işbu emsâl rakamı üzerine taksîm olunur ve eğer işâreti menfî olsa muʿâdelenin her bir hadinin işâreti tahvil olunarak (netice madde 92) muʿâdele-i mezkûre işbu $x^2 \pm v\,x = \pm\,l$ muʿâdelesi tarzına ircʿa olunduktan sonra tarafeyn-i muʿâdeleye mechûlü mücerredin nısfı emsâl murabbaʿ zam olunarak muʿâdelenin bir tarafı tekmîl murabbaʿ kılınub taraf-ı âhari dahi yalnız kemmiyât-ı muʿâdeleden ibâret olur. Bʿade tarafeynin cezr-i murabbaʿları ahz olunarak hâdis olan derece-i evveli muʿâdelesinden mechûl-ü mezkûrun kıymeti istihrâc olunur.

Misâl 1

Farazâ $x^2 + v\,x = l$ muʿâdelesinde $x^2 + v\,x + \frac{v^2}{4}$ zû hudûd-u selasesi $x + \frac{v^2}{2}$ zû hadeynin murabbaʿ olmağın (madde 66) bu sûretde tarafeyn-i muʿâdeleye $\frac{v^2}{4}$ zam olundukta $x^2 + v\,x + \frac{v^2}{4} = l + \frac{v^2}{4}$ muʿâdelesi hâdis olup tarafeynin cezr-i murabbaʿları ahz olundukta

$x + \frac{v}{2} = \pm\ \sqrt{l} + \frac{v^2}{4}$ nakl ile $x = -\frac{v}{2}\ \pm\ \sqrt{l} + \frac{v^2}{4}$

ve eğer $x^2 - v\,x = l$ olsa yine ber vech-i meşrûh hâl olunarak $x = \frac{v}{2} \pm \sqrt{l} + \frac{v^2}{4}$ olur.

Misâl 2

$x^2 - 12\,x + 35 = 0$ x mechûl-ü matlûb olsa

nakl ile $x^2 - 12\,x = -35$

6 adedin murabbaʿ tarafeyn-i muʿâdeleye zam olundukta

$x^2 - 12\,x + 36 = -35 + 36 = 1$ tarafeynin cezr-i murabbaʿları ahz olundukta

$x - 6 = \pm\ 1$

$\therefore$ $x = 6 \pm 1 = 7$ yahud 5 olup mechûlün işbu kıymetinden herhangisi muʿâdelede x mahaline ikâme olunsa muʿâdelenin şartı yerine gelir. Yani muʿâdelenin taraf-ı yesâri sıfıra müncer olur.

(106) Eğer bir derece-i sâniye muʿâdelesi $b\,x^2 \pm c\,x = \pm\,d$ tarzında bulunsa işbu muʿâdelenin taraf-ı yemini tarîk-ı âhar ile dahi vech-i âtî üzere tekmîl murabbaʿ kılınabilir. Şöyle ki, muʿâdelenin her bir haddi 4 b ile darb olundukta

$4\,b^2\,x^2 \pm 4\,b\,c\,x = \pm\,4\,b\,c\,d$ tarafeyne c^2 zam olundukta

$4\,b^2\,x^2 \pm 4\,b\,c\,x + c^2 = \pm\,4\,b\,c\,d + c^2$

tarafeynin cezr-i murabbaʿları ahz olundukta

$2\,b\,x \pm \mathrm{c} = \pm\sqrt{c^2 \pm\ 4\,b\,c\,d}$

$\therefore$ $x = \pm\,\frac{\sqrt{\mathrm{c}^2 \pm 4\,b\,c\,d}}{2\,b}$

Misâl 3

$\frac{6}{x+1} + \frac{2}{x} = 3$ x mechûl-ü matlûb olsa

$6 + \frac{2\,x\ +2}{x} = 3\,x + 3$

$6\,x + 2\,x + 2 = 3\,x^2 + 3\,x$

$3\,x^2 - 5\,x = 2$

4 x 3 yani 12 ile tarafeyn darb olundukta

$36\,x^2 - 60\,x = 24$

$(5)^2$ yani 25 tarafeyne zam olundukta $36\,x^2 - 60\,x + 25 = 24 + 25 = 49$

$\therefore\ \ 6\,x = 5 \pm 7 = 12$ yahud -2

$\therefore\ \ x = 2$ yahud $-1/3$

Misâl 4

$b\,d\,x^2 - c\,d\,x + b\,e\,x = c\,e$ x mechûl-ü matlûb olsa

$b\,d\,x^2 - (c\,d - b\,e)\,x = c\,e$ tarafeyn $4\,b\,d$ ile darb olunarak

$4\,b^2 d^2 x^2 - 4\,b\,d\,(c\,d - b\,e)\,x = 4\,b\,d\,c\,e$

tarafeyne $(c\,d - b\,e)^2$ zam ile

$4\,b^2 d^2 x^2 - 4\,b\,d\,(c\,d - b\,e)\,x + (c\,d - b\,e)^2 = 4\,b\,d\,c\,e + (c\,d - b\,e)^2$

tarafeynin cezri ahz ile

$2\,b\,d\,x - (c\,d - b\,e) = \pm\,(c\,d + b\,e)$

$2\,b\,d\,x = (c\,d - b\,e) \pm (c\,d + b\,e)$

$= 2\,c\,d$ yahud $-2\,b\,e$

$\therefore\ \ x = c/b$ yahud $-e/d$ olur.

Misâl 5

$x + \sqrt{5\,x + 10} = 8$ nakl ile $\sqrt{5\,x + 10} = 8 - x$

terbiʿ ile $5\,x + 10 = 64 - 16\,x + x^2$

$x^2 - 21\,x = 54$

tekmil-i murabbaʿ kılınarak $x^2 - 21\,x + 441/4 = 441/4 - 54 = 225/4$

cezri ahz olunarak $x - 21/2 = \pm\,15/2$

$\therefore\ \ x = 18$ yahud 3

Bu vechle x mechûlünün iki kıymeti istihrâc olunmuş ise de bi't-tecrübe zâhir olur ki 18 adedi muʿâdelenin şartına tevafuk itmez. Ve sebepi bu olur ki $5\,x + 10$ zû hadeyni $+\sqrt{5\,x + 10}$ kemmiyetinin murabbaʿ olduğu gibi $-\sqrt{5\,x + 10}$ kemmiyetinin dahi murabbaʿ olup $\sqrt{5\,x + 10} = 8 - x$ muʿâdelesinde tarafeyni terbiʿolunarak muʿâdeleye bir şart-ı cedîd idhâl olunup ve mechûlün dahi şart-ı mezkûre mutâbık bir kıymet-i mahsûsası hâsıl olur. Nitekim 18 adedi x mechûlünün şol bir kıymetidir ki $x - \sqrt{5\,x + 10} = 8$ muʿâdelesinin şartına tevakkuf eder.

Bu dahi hafî olmaya ki $+x \text{ x } +y$ darbı $-x \text{ x } -y$ darbına müsâvî olmak kâʿidesine mebnî kemmiyâtın darb ve terfʿilerinde mechûlün kayyimi müceddideleri muʿâdeleye idhâl olunup eğer tabii-ı muʿâdele ile onlar terk olunamaz ise kayyim mezkûre muʿâdele-i âharinde zâhir olur.

(107) Derece-i sâniyeden bir muʿâdelede mechûlün yalnız iki kıymet-i muhtelifesi bulunur ki, muʿâdele-i mezkûrede x mahaline ikâme olundukta müsâvat hâsıl olur. Zirâ işbu $b x^2 + c x + d = 0$ muʿâdelesinde x meçhulünün m n e misillü üç kıymet-i muhtelifesi farz olunsa bu suretçe

$b m^2 + c m + d =$ ………..…….. (1)

$b n^2 + c n + d =$ ………………. (2)

$b e^2 + c e + d =$ ……………….. (3)

2 rakamıyla işârat olunan muʿâdele 1 rakamıyla işârat olunan muʿâdeleden tarh olundukta $b(m^2 - n^2) + c(m - n) = 0$

$\therefore$ $b(m + n) + c$ …………………. (bir)

ve yine $b(m^2 + n^2) + c(m - e) = 0$

$\therefore$ $b(m + e) + c$ …………………. (iki)

muʿâdele-i iki muʿâdele-i birden tarh olundukta

$b(n - e) = 0$ olur.

Lakin b kemmiyeti sıfıra müsâvî olamaz. Eğer müsâvî olsa muʿâdelenin derece-i sâniye muʿâdelesi olmaması lazım gelir. Bu ecelden $n - e = 0$ yahud $n = e$ olup derece-i sâniyeden bir muʿâdelede x mechûlünün üç kıymeti muhtelifesi olamayıb yalnız iki kıymeti muhtelifesi olduğu nümâyân olur.

(108) Derece-i sâniyeden $x^2 + q x + l = 0$ şeklinde olan bir muʿâdelede $-q = x$ mechûlünün iki kıymeti mecmûʿ $l = x$ mechûlünün iki kıymetinin hâsıl-ı darbı farazâ m ve n harfleri x mechûlünün iki kıymetini irae eylese

$m^2 + q m + l = 0$

ve $n^2 + q n + l = 0$ olmağın

$\therefore$ $m^2 - n^2 + q(m - n) = 0$

$\therefore$ $m + n + q = 0$

yahud $-q = m + n$

ve yine $l = -q m - m^2$

$= (m + n) m - m^2$

$= m\, n$

(netice) eğer muʿâdele $b\, x^2 + c\, x + d = 0$ şeklinde bulunsa

$x^2 + (c / b)\, x + d / b = 0$ olmağın akdemce ispat olunduğu üzere

$- c / b = x$ mechûlünün iki kıymeti mecmûʿ ve

$d / b = x$ mechûlünün iki kıymetinin hâsıl-ı darbı olmuş olur.

(109) Bir muʿâdelede x mechûlünün kıymetleriyle muʿâdele-i mezkûre hudûdu emsallerinin beynlerinde akdemki maddede ispat olunan münâsebât tarîk-ı müteʿaddide ile müstʿameldir. Evvela bir muʿâdelenin sıhhati ve adem sıhhatini imtihân zımnında istiʿmâl olunur. Sâniyen bir muʿâdele-i mefrûdada mechûlün kıymetleri beyninde bazı münâsebât mʿalum olarak mechûl-ü mezkûrun kıymetlerini takdir ve tayin için istiʿmâl olunur. Sâlisen derece-i sâniye tarzına ircâʿolunup yalnız mechûlün kıymetleri mecmûʿnı yahud hâsıl-ı darbını istiʿlâm için muʿâdelât-ı muhtelife halinde istiʿmâl olunur. Nitekim vech-i istiʿmâlleri zîrde vazʿ olunacak emsileden fehim olunsa gerektir.

Misâl 1

$3\, x^2 - 5\, x = 2$ işbu muʿâdelede x mechûlünün kıymetleri (madde 106 misâl 3) 2 ve – 1/3 olup işbu adedin x mechûlünün kıymet-i sahîhi olduğunu tecrübe zımnında muʿâdele-i mezkûre $x^2 - 5 / 3\, x - 2 / 3 = 0$ şekli tahtına vazʿ olunarak çünkü $2 + (-1 / 3) = 5 / 3$ ve $2 \times (-1 / 3) = -2 / 3$ olmağın x mechûlünün matlûb olan kıymetleri 2 ve – 1 / 3 olduğu yekden maʿlum olunur.

Misâl 2

$x^2 - 21\, x + 54 = 0$ işbu muʿâdelede x mechûlünün kıymeteyninden biri diğerinin altı misli olduğu maʿlum oldukta kıymeteyn-i mezkûreteynden her biri matlûbdur. Kıymeteyn-i merkûmeteynden biri b faraza olunsa diğeri 6 b olmağın mecmûʿları yahud

$7\, b = 21$

$\therefore\ b = 3$ olup matlûb olan kıymetlerden biri 3 ve diğeri 18 olmuş olur.

(110) Herhangi muʿâdele işbu $(x + b)\, z = 0$ sûretinde zuhûr edip z harfi x kemmiyeti mechûlesini hâvî herhangi düstûr-u cebriyeyi işʿâr eylese bundan lazım gelir ki $x + b = 0$ ve $z = 0$ yani $x = - b$ muʿâdele-i mezkûrenin bir hâli olup $z = 0$ muʿâdelesinden dahi hal-i sânîsi zâhir olur. Bu takdirce bir muʿâdele taksîm ile yahud bir madrûbun

terkiyle ihtisâr olundukta eğer işbu maksûm-u aleyh yahud madrûb-u metruk kemmiyet-i mechûleyi hâvî ise maksûm-u aleyh mezkûr yahud madrûb-u metruk sıfıra muʿâdil kılınarak muʿâdelenin hiç olmaz ise bir hali olsun istihrâc olmuş olur.

Şöyle ki, $x^2 + 3x = 7x$ muʿâdelesi x ile kâbil-i taksîm olmağın bu ecelden $x = 0$ muʿâdele-i mefrûdanın bir hali olmuş olur.

ve yine $x^2 - 5x + 6 = 0$ faraza olunsa işbu muʿâdele $(x - 2)(x - 3) = 0$ tarzında tahrîr olunabildiğinden

$\therefore\ x - 2 = 0$ yahud $x = 2$

ve $x - 3 = 0$ yahud $x = 3$ x mechûlünün kıymetleri işte bu kâʿide vasıtasıyla derece-i sâniye muʿâdelâtî hal olunup ânifen beyan olunan kâʿide-i ʿumûmîden baʿzen sarf-ı nazar olunur.

Misâl iʿtâ olunan işbu $(x - d)\sqrt{b\,c} - (b - c)\sqrt{d\,x} = 0$ muʿâdeleden x matlûbdur.

$x\sqrt{b\,c} - d\sqrt{b\,c} - b\sqrt{d\,x} + c\sqrt{d\,x} = 0$

$\therefore\ \sqrt{c\,x}\,(\sqrt{b\,x} + \sqrt{c\,d}) - \sqrt{b\,d}\,(\sqrt{b\,x} + \sqrt{c\,d}) = 0$

yahud $(\sqrt{c\,x} - \sqrt{b\,d})(\sqrt{b\,x} + \sqrt{c\,d}) = 0$

$\therefore\ \sqrt{c\,x} - \sqrt{b\,d} = 0$

ve $\sqrt{b\,x} + \sqrt{c\,d} = 0$

$\therefore\ c\,x = b\,d$

ve $b\,x = c\,d$

$x = b\,d / \mathrm{c}$

$x = c\,d / b$

(111) Hadeyninde mechûl bulunan herhangi bir muʿâdelede hadeyn-i mezkûreynden birinde bulunan mechûlün üssü diğer haddinde bulunan mechûlün üssünün iki misli olsa bu nevii muʿâdelât derece-i sâniye muʿâdelâtî misillü hal olunur.

$z + 4z^{1/2} = 21$ olsa z matlûbdur.

$z + 4z^{1/2} + 4 = 21 + 4 = 25$

$z^{1/2} + 2 = \pm 5$

$z^{1/2} = \pm 5 - 2 = 3$

$\therefore\ z = 9$ yahud 49

Misâl 2

$x^{-1} + x^{-1/2} + 1/4 = 6$ olsa x matlûbdur.

$x^{-1} + x^{-1/2} + 1/4 + 1/4 = 6 + 1/4 = 25/4$

$x^{-1/2} + 1/2 = \pm\, 5/2$

$x^{-1/2} = -\,1 \pm 5/2 = 2$ yahud $-\,3$

$x^{1/2} = 1/2$ yahud $-\,1/\,3$

$x = 1/4$ yahud $1/\,9$

Misâl 3

$y^4 - 6\,y^2 - 27 = 0$ olsa y matlûbdur.

$y^4 - 6\,y^2 = 27$

$y^4 - 6\,y^2 + 9 = 27 + 9 = 36$

$y^2 - 3 = \pm\, 6$

$y^2 = 3 \pm 6 = 9$ yahud $-\,3$

$\therefore\ y = \pm\, 3$ yahud $\pm\sqrt{-3}$

Misâl 4

$y^6 + r\,y^3 + l^3\,/\,27 = y^6 + r\,y^3 = -\,l^3\,/\,27$

$y^6 + r\,y^3 + r^2/\,4 = r^2/\,4 - l^3\,/\,27$

$y^3 + r\,/\,2 = \pm\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{l^3}{27}}$

$y^3 = -\,r\,/\,2 \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{l^3}{27}}$

$\therefore\ y = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{l^3}{27}}}$

(112) z harfiyle mechûlü hâvî herhangi bir zû hudûd kesîre işʿâr olunarak işbu $z^2 + q\,z = l$ şekline ircâʿı mümkün olan bazı muʿâdelât-ı sâire derece-i sâniye-i muʿâdelâtî misillü yani tekmîl-i murabbaʿ kılınarak eshel vech üzere hal olunabilirler.

Misâl 1

$b\,x^2 + \sqrt{b\,x^2 - c\,x + d} = c\,x$ muʿâdelesinden x matlûbdur.

nakl ile $b\,x^2 - c\,x + \sqrt{b\,x^2 - c\,x + d} = 0$

tarafeyne d zam ile $b\,x^2 - c\,x + d + \sqrt{b\,x^2 - c\,x + d} = d$

tekmîl-i murabbaʿ kılınarak ($b\,x^2 - c\,x + d$) + $\sqrt{b\,x^2 - c\,x + d}$ + 1/4 = d +1/4

($\sqrt{b\,x^2 - c\,x + d}$) + 1/2 = $\pm\sqrt{d + 1/4}$

($\sqrt{b\,x^2 - c\,x + d}$) = $\pm\sqrt{4\,d + 1/4}$ – 1/2

$b\,x^2 - c\,x + d = \{ \pm\sqrt{4\,d + 1/4} - 1/2\}^2$

bu vechle muʿâdele-i mezkûre ʿâdî bir derce-i sâniye muʿâdelesine ircâʿ olunmagın işbu muʿâdeleden x mechûlünün kıymeti kemâ fi'ṣ-sâbık istihrâc olunabilir.

Misâl 2

$x^2 - x + 5\sqrt{2\,x^2 - 5\,x + 6} = 1/2\,(3\,x + 33)$ muʿâdelesinden x mechûl-ü matlûbdur.

$2\,x^2 - 2\,x + 10\sqrt{2\,x^2 - 5\,x + 6} = 3\,x + 33$

$2\,x^2 - 5\,x + 6 + 10\sqrt{2\,x^2 - 5\,x + 6} = 39$

$(2\,x^2 - 5\,x + 6) + 10\sqrt{2\,x^2 - 5\,x + 6} + 25 = 39 + 25 = 64$

$\sqrt{2\,x^2 - 5\,x + 6} + 5 = \pm 8$

$\sqrt{2\,x^2 - 5\,x + 6} = \pm 8 - 5 = 3$ yahud $- 13$

$2\,x^2 - 5\,x + 6 = 9$ yahud 169

olup hal olunmak için iki adet derec-i sâniye muʿâdelesi bâkî kalur.

(113) Birden ziyâde muʿâdelât ve mechûl bulunur ise derece-i evveli muʿâdelâtında beyan olunduğu üzere muʿâdelât-ı mezkûre mechûlâtından yalnız birini hâvî bir muʿâdeleye bʿade'l-ircâʿ işbu muʿâdele hal olunup mechûl-ü mezkûrun kıymeti istihrâc birle muʿâdelât-ı sâirede işbu mechûlün müsâvîsi mahaline ikâme olunarak mechûlât-ı bâkîyenin kıymetleri dahi istihsâl olunur.

Misâl 1

$x - \frac{x-y}{2} = 4$

$y - \frac{x+3\,y}{x+2} = 1$ x ile y mechûlleri matlûbdur.

birinci muʿâdeleden $2\,x - x + y = 8$ $x + y = 8$ $x = 8 - y$

ikinci muʿâdeleden $x\,y + 2\,y - x - 3\,y = x + 2$

yahud $x\,y - 2\,x - y = 2$

vazʿ ile $(8 - y)\,y - 2\,(8 - y) - y = 2$

$8\,y - y^2 - 16 + 2\,y - y = 2$

$9\,y - y^2 = 16 + 2 = 18$

$y^2 - 9\,y = - 18$

$y^2 - 9y + 81/4 = 81/4 - 18$

$y - 9/2 = \pm 3/2$

$\therefore \ y = 9 \ \ 3/2 = 6$ yahud 3

ve $x = 8 - y = 2$ yahud 5

bu nevii muʿâdelât bazı hiyel-i mahsûsa vasıtasıyla asân-ı vech üzere hal olunabilib hiyel-i mezkûrenin keyfiyet-i tatbikleri dahi ziyade iştigâl ile tahsîl olunur.

Misâl 2

$x^2 + y^2 = 65$

$x\,y = 28$ x ile y mechûllerinin istihrâcı matlûbdur.

ikinci muʿâdeleden $2\,x\,y = 56$

bu muʿâdele birinci muʿâdele ile cemʿ olundukta

$x^2 + 2\,x\,y + y^2 = 121$ ve tarh olundukta

$x^2 - 2\,x\,y + y^2 = 9$ işbu muʿâdeleteynin cezr-i murabbaʿları ahz olundukta

$x + y = \pm 11$ ve

$x - y = \pm 3$

cemʿ olundukta $2\,x = \pm 14$

$\therefore \ x = 7$ yahud -7 ve

$y = 4$ yahud -4

Misâl 3

$x^2 / y + y^2 / x = 18$

$x + y = 12$ x ile y matlûbdur.

birinci muʿâdeleden $x^3 + y^3 = 18\,x\,y$

ikinci muʿâdeleden $x^3 + y^3 + 3\,x\,y\,(x + y) = 1728$

vazʿ ile $18\,x\,y + 36\,x\,y = 1728$

$54\,x\,y = 1728$

$\therefore \ x\,y = 32$

ve keza $x^2 + 2\,x\,y + y^2 = 144$

ve $4\,x\,y = 128$

$\therefore \ x^2 - 2\,x\,y + y^2 = 16$

$x - y = \pm 3$

$x + y = 12$

$\therefore \ 2\,x = 16$ yahud 8

$x = 8$ yahud 4 ve

$y = 4$ yahud 8

(114) Bazan mechûleynden birinin mahaline mechûl-ü sâni ile bir mechûl sâlise âharin hâsıl-ı darbını vazʿ etmek kâide-i kesîreye mûcib olur.

Misâl 3

$x^2 + x\,y = 12$

$x\,y - 2\,y^2 = 1$ x ile y matlûbdur.

Farazâ $e\,y = x$ olsa $e^2\,y^2 + e\,y^2 = 12$

$e\,y^2 - 2\,y^2 = 1$

birinciden $y^2 = 12 / e^2 + e$

ikinciden $y^2 = 1 / e - 2$

$\therefore$ $12 / e^2 + e = 1 / e - 2$

yahud $e^2 + e = 12\,e - 24$

$e^2 - 11\,e = -24$

$e^2 - 11\,e + 121/4 = -24 + 121/4 = 25/4$

$e - 11/2 = \pm 5/2$

$\therefore$ $e - 11 \pm 5/2 = 8$ yahud 3

ve $y^2 = 1 / e - 2 = 1/6$ yahud 1

$\therefore$ $y = \pm 1 / \sqrt{6}$ yahud ± 1 ve

$x = e\,y = \pm 8 / \sqrt{6}$ yahud ± 3

(115) Bazan mechûleynin mahaline diğer iki mechûl mecmûʿyle tefâzulları vazʿ olunarak ʿamel-i hal teshîl olunabilir.

Misâl 4

$x + y = 4$

$(x^2 + y^2)\,(x^3 + y^3) = 280$ x ile y matlûbdur.

farazan $x = d + v$

ve $y = d - v$ olsalar

$x + y = 2\,d = 4$

$\therefore$ $d = 2$

ve keza $x^2 + y^2 = (2 + v)^2 + (2 - v)^2$

$= 8 + 2\,v^2$

ve $x^3 + y^3 = (2 + v)^3 + (2 - v)^3$

$= 8 + 12v + 6v^2 + v^3 + 8 - 12v + 6v^2 - v^3$

$= 16 + 12v^2$

$\therefore \; (8 + 2v^2)(16 + 12v^2) = 280$

yahud $(4 + 2v^2)(4 + 3v^2) = 35$

$16 + 16v^2 + 3v^4 = 35$

$v^4 + 16/3\, v^2 = 19/3$

$v^4 + 16/3\, v^2 + 64/9 = 19/3 + 64/9 = 121/9$

$v^2 + 8/3 = \pm\, 11/3$

$\therefore \; v^2 = \pm\, 11 - 8/3 = 1$ yahud $- 19/3$

ve $v = 1$

$\therefore \; x = d + v = 3$

ve $y = d - v = 1$

3.2.21. ❁ Derece-i sâniye muʿâdelâtını ihdâs eden mesâil beyanındadır. ❁

(116) Mesele 1 Bir âdem 80 kuruşa bir takım tavuk beyʿ ederek eğer beyʿ olunan tavuğun adedi dört ziyade olsa beherinin bahası birer kuruş noksan olacağı malum olmakla zikr olunan tavuğun adedi ile beherinin kıymeti matlûbdur.

x tavuğun adedi farz olunsa

bu takdirce $80 / x$ beherinin kıymeti olup ve

$\frac{80}{x+4}$ farz-ı sâniye göre beherinin kıymeti olup

$\therefore \; \frac{80}{x+4} = \frac{80}{x} - 1$

$80 = \frac{80x + 320}{x} - x - 4$

$80x = 80x \pm 320 - x^2 - 4x$

$x^2 + 4x = 320$

$x^2 + 4x + 4 = 320 + 4 = 324$

$x + 2 = \pm\, 18$

$\therefore \; x = \pm\, 18 - 2 = 16$ yahud $- 20$

ve $80 / x = 80 / 16 = 5$ kuruş beherinin kıymeti

İşbu misâlde ve emsile-i sâirede ve bâhusûs ʿulûm-u riyaziye mesâili halinde istihsâl olunan cevabların cümlesi mesâil-i mezkûrenin şerâitine tevafuk etmemesinin sebepi şu olabilir ki ifâdat-ı cebriye taʿbîrât-ı lisâniyeden dahi ʿumûmi olup şerâit-i mahsûsaya işʿâr eden muʿâdele şerâit-i sâireye hâvî olup farziyât-ı sâireye dahi cevab olabilir. Nitekim bâlâda vazʿ olunan misâlde x yalnız müsbet olan bir kemmiyeti işʿâr etmeyip hem müsbet hem menfî olan bir kemmiyeti işʿâr eder (madde 106). İmdi işbu $\frac{80}{x+4} = \frac{80}{x} - 1$ muʿâdelede x menfî olsa yahud işbu x kemmiyet-i mezkûr tavuğun adedinin noksâniyetini işʿâr eylese zikr olunacak muʿâdelenin hali için bir ifade-i mahsûsa hâdis olmuş olur. Yani bir âdem 80 kuruşa bir takım tavuk iştirâ edip eğer zikr olunan tavuğun adedi dört noksan olsa imiş beherinin kıymeti bir kuruş ziyade olacak imiş. Bu sûretde kaç adet tavuk mubâyaa eylediği matlûbdur demek olur.

(117) Mesele 2 20 parmak tûlâ olan bir hatt-ı müstakimi bir vechle iki kısma taksîm etmek matlûbdur ki hatt-ı müstakim merkûmun kısmınından birine mustatil, kısm-ı âhar murabbaʿına müsâvî ola

x kısm-ı aʿzam farz olunsa $20 - x$ kısm-ı asgar olup ve

$x^2 = (20 - x) \times 20 = 400 - 20x$ meseleden

$x^2 + 20x = 400$

$x^2 + 20x + 100 = 400 + 100 = 500$

$x + 10 = \pm\sqrt{500}$

$\therefore\ x = \sqrt{500} - 10$ yahud $x = -\sqrt{500} - 10$

Misâl-ı sâbıkda zikr olunan keyfiyet işbu misâle dahi tatbik olunabilüb x mechûlünün istihrâc olunan kıymet-i menfîyesi beyhûde ve abes olmayarak eğer hatt-ı müstakim-i mezkûr $\sqrt{500} + 10$ parmak miktarı bir cihete istihrâc olunsa hatt-ı merkûm ile kısmı mahreç mecmûʿnın hatt-ı mezbûra mustatili kısmı mahreç murabbaʿına müsâvî olduğunu işʿâr eder.

(118) Mesele 2

İki adet istihrâcı matlûbdur ki, adeteyn-i mezkûreynin mecmûʿları ve hâsıl-ı darbları ve murabbaʿları mecmûʿî birbirine müsâvî olur.

$x + y$ ve $x - y$ adeteyn-i mezkûreyn farz olunsa mecmûʿları $2x$

hâsıl-darbları $x^2 - y^2$ ve

murabbaʿları mecmûʿî $2x^2 + 2y^2$

mesele ile $2x = 2x^2 + 2y^2$ yahud $x = x^2 + y^2$

ve keza $2x = x^2 - y^2$ cemʿ ile $3x = 2x^2$

$\therefore\ x = 3/2$

$2x = x^2 - y^2$ yahud $3 = 9/4 - y^2$

$y^2 = 9/4 - 3 = 9 - 12/4 = -3/4$

$\therefore\ y = \pm\sqrt{-3}/2$ $\quad x + y = 3 + \sqrt{-3}/2$ $\quad x - y = 3 - \sqrt{-3}/2$

Çünkü her bir kemmiyetin murabbaʿ müsbet olup menfî bir kemmiyetin cezr-i murabbaʿî olmamakla *x y* mechûllerinin bâlâda istihrâc olunan kıymetlerinden meselenin farzına nazaran adeteyn-i mezkûreynin adem-i vücudu zâhir ve aşikâr olur.

3.2.22. ❁ Tenâsüb beyanındadır. ❁

(119) Herhangi dört miktardan evvel sânînin herhangi izʿâfî veyâ cüz-ü olduğu gibi sâlise dahi râbiʿan evvel kadar izʿâfî veyâ cüz-ü olsa yani $b / c = d / e$ oldukta işbu *b c d e* kemmiyât-ı erbʿaıye kemmiyât-ı mütenâsibe tesmiye olunup bu vechle $b : c :: d : e$ yahud $b : c = d : e$ tahrîr olunarak *b* kemmiyetinin *c* kemmiyetine nisbeti *d* kemmiyetinin e kemmiyetine nisbeti gibidir deyü taʿbîr olunur. Ve işbu *b* ile *e* kemmiyetlerine ol nisbetin tarafeyni ve *c* ile *d* kemmiyetlerine vasateyni ıtlâk olunur.

(120) Dört miktar mütenâsib olsalar tarafeynin hâsıl-ı darbı vasateynin hâsıl-ı darbına müsâvîdir. Farazâ *b c d e* işbu mekâdir erbaa mütenâsib olsa $b / c = d / e$ (madde 119) olup tarafeyn-i muʿâdele *c e* ile darb olundukta $b\, e = c\, d$ olur.

Netice 1 Eğer evvelin sâniye nisbeti sâninin sâlise nisbeti gibi olsa tarafeynin hâsıl-ı darbı vasatın murabbaʿına müsâvî olur.

Netice 2 Bir nisbetin hudûd-u erbaʿısından herhangi üçü maʿlûm olsa işbu $b\, e = c\, d$ muʿâdeleden dördüncüsü istihrâc olunabilir. Ve bundan ilm-i hesapda olan erbaʿ-ı mütenâsibe neşet eder.

(121) Eğer iki kemmiyetin hâsıl-ı darbı diğer iki kemmiyetin hâsıl-ı darbına müsâvî olsa işbu kemmiyât-ı erbaʿı mütenâsib olarak zikr olunan hâsıl-ı darblardan birinin madrûbları tarafeyn ve diğerinin madrûbları vasateyn kılınır.

Farazâ $x\, y = b\, c$ olsa tarafeyn *b y* üzerine taksîm olundukta $x / b = c / y$

yahud $x : b :: c : y$ olur (madde 119).

(122) Eğer $b : c :: d : e$ ve $d : e :: v : q$ olsa $b : c :: v : q$ olur.

Zirâ $b / c = d / e$ ve $d / e = v / q$ olduğundan $b / c = v / q$ yahud $b : c :: v : q$ olup matlûb sâbit olur.

(123) Eğer dört kemmiyet mütenâsib olsalar onlar aksi tarafıyla dahi mütenâsib olurlar. Yani $b : c :: d : e$ olsa $c : b :: e : d$ olur. Zirâ $b / c = d / e$ olup vâhid işbu kemmiyeteyn mütesâviteteynden her biri üzerine taksîm yani tarafeyn aks olundukta $c / b = e / d$ yani $c : b :: e : d$ olup matlûb sâbit olur.

(124) Eğer dört kemmiyet mütenâsib olsalar onlar bedel tarîkıyla dahi mütenâsib olurlar. Yani $b : c :: d : e$ olsa $b : d :: c : e$ olur. Zirâ kemmiyetler mütenâsib olduğundan $b / c = d / e$ olmağın tarafeyn c / d ile darb olundukta $b / d = c / e$ yahud $b : d :: c : e$ olup matlûb sâbit olur.

Kaldı ki, bâlâda zikr olunan kemmiyât-ı erbaʿa cins-i vâhidden olmadıkça bedel-i tarîkının icrâsı mümkün olamaz. Zirâ, işbu bedel-i tarîkınde kemmiyet-i evvel kemmiyet-i sâlisin herhangi izʿâfî veyâ cüz-ü olması mefrûzdur. Nitekim bir hatt-ı müstakimin hatt-ı müstakim-i âhara nisbeti bir sıkletin sıklet-i âhara nisbeti gibi olabilir ise de bir hatt-ı müstakimin bir sıklete cesâmet cihetiyle hiçbir nisbeti olmayıp ve bu nevii misâllerde eğer kemmiyât-ı erbaʿa adet ile işʿâr olunmuş ise yahud kemmiyât-ı mezkûre cins-i vâhidden ise bedel-i tarîkının icrâsı mümkün olup hâdis olan nisbet dahi sahîh olmuş olur.

(125) Eğer dört kemmiyet mütenâsib olsalar birinci ile ikinci mecmûʿnın ikinciye nisbeti üçüncü ile dördüncü mecmûʿnın dördüncüye nisbeti gibi olarak bu ʿamele terkîb-i tarîkı tesmiye olunur.

Farazâ $b : c :: d : e$ olsa

kezalik $b + c : c :: d + e : e$ olur.

zirâ $b / c = d / e$ olduğundan tarafeyne vâhid zam olundukta

$b / c + 1 = d / e + 1$ yani $b + c / c = d + e / e$

yahud $b + c : c :: d + e : e$ olup matlûb sâbit olur.

(126) ve keza fazl-ı tarîkıyle birinci ile ikinci beyninde olan fazlın ikinciye nisbeti üçüncü ile dördüncü beyninde olan fazlın dördüncü nisbeti gibidir.

zirâ $b / c = d / e$ olmağın tarafeynden vâhid tarh olundukta

$b / c - 1 = d / e - 1$

yani $b - c / c = d - e / e$

yahud $b - c : \mathrm{c} :: d - e : e$ olur.

(127) ve yine kalb tarîkıyle birincinin ikinci ile beyninde olan fazlına nisbeti üçüncünün dördüncü ile beyninde olan fazlına nisbeti gibidir.

Akdemki madde ile $b - c / c = d - e / e$ ve $c / b = e / d$ (madde 123)

$\therefore \quad b - c / c \times c / b = d - e / e \times e / d$ yahud $b - c / b = d - e / d$

yani $b - c : b :: d - e : d$

aks tarîkıyla $b : b - c :: d : d - e$ olur.

(128) İmdi dört miktar mütenâsib olsalar birinci ile ikinci mecmûʿnın beynlerinde olan tefâzale nisbeti üçüncü ile dördüncü mecmûʿnın beynlerinde olan tefâzale nisbeti gibidir.

Farazâ $b : c :: d : e$ olsa

$b + c : b - c :: d + e : d - e$ olur.

madde ile $b + c / c = d + e / e$ olup

ve madde ile $b - c / c = d - e / e$ olmağın bu taldirce

$b + c / c \div b - c / c = d + e / e \div d - e / e$ olur. (müteârife 4)

yahud $b + c / b - c = d + e / d - e$

yani $b + c : b - c :: d + e : d - e$ olur.

(129) ve dahi kemmiyât-ı müteaddide mütenâsib olsalar bir mukaddemin kendi tâlisine nisbeti mukaddemler mecmûʿnın tâlileri mecmûʿna nisbeti gibidir.

farazâ $b : c :: d : e :: v : q$ olsa

$b : c :: b + d + v + \mathrm{lh} : c + e + q + \mathrm{lh}$ olur

zirâ $b / c = d / e$ olmağın $b\, e = c\, d$ olup bu vechle

$b\, q = c\, v$

ve keza $b\, c = v\, b$ olduğundan

bu takdirce $b\, c + b\, e + b\, q = c\, b + c\, d + c\, v$

yahud $b\,(v + e + q) = c\,(b + d + v)$ olarak (madde 121) ile

$b : c :: b + d + v : v + e + q$ olup kemmiyât-ı bâkîye için dahi bu siyâk üzere olur.

(130) Dört miktar mütenâsibden birinci ile ikinci herhangi bir kemmiyet ile darb veya taksîm olunsa ve keza üçüncü ile dördüncü dahi bir miktar ile darb veya taksîm olunsalar kemmiyât-ı hâsıla mütenâsib olurlar.

farazâ $b : c :: d : e$ olsa $m\, b : m\, c :: d / n : e / n$ olur.

çünkü $b / c = d / e$ olduğundan bu sûretde (madde 35) ile

$m\, b / \mathrm{m}\, c = d\ 1 / n\ / e\ 1 / n$ yahud $m\, b : m\, c :: d / n : e / n$ olur.

(131) Dört miktar mütenâsibden birinci ile üçüncü herhangi bir kemmiyet ile darb veyâ taksîm olunup ve keza ikinci ile dördüncü bir kemmiyet-i âhar ile darb veyâ taksîm olunsa işbu kemmiyât-ı hâsıla dahi mütenâsib olurlar.

Çünkü $b / c = d / e$ olmağın bu sûretde $m\, b / c = m\, d / e$ olup ve

$m\, b / c\; 1 / n = m\, d / e\; 1 / n$ yahud $m\, b : c / n :: m\, d : e / n$ olur.

Netice herhangi bir nisbetde ikinci ile dördüncü hadlerin mahaline hadeyn-i mezkûreyn ile mütenâsib olan kemmiyeteyn ikâme olunarak yine nisbet bâkî kalır. Çünkü d / n ile e / n beyninde olan nisbet c ile e beyninde olan nisbete müsâvîdir. (madde 130)

(132) İki sıra tenâsübün nazîr nazîre bulunan hadleri birbirleriyle darb olunsa hâsıl-ı darblar dahi mütenâsib olurlar.

Farazâ $b : c :: d : e$ olsa ve $v : q :: t : h$ olsa

ve keza $b\, v : c\, q :: d\, t : e\, h$ olur.

zirâ $b / c = d / e$ olup ve $v / q = t / h$ olduğundan bu sûretde

$b / c \times v / q = d / e \times t / h$ yahud $b\, v / c\, q = d\, t / e\, h$ yani

$b\, v : c\, q :: d\, t : e\, h$ olur. Ve bu amele tenâsüb te'lîfi tesmiye olunarak tenâsüb-ü müteaddideye tatbik olunsa dava yine sahîh olmuş olur.

(133) Dört miktar mütenâsibin müsâvî kuvvetleri ve müsâvî cezleri dahi mütenâsib olurlar. Farazâ $b : c :: d : e$ olsa $b / c = d / e$ olduğundan tarafeyn n kuvvete rafi' olundukta $b^n / c^n = d^n / e^n$ yahud $b^n : c^n :: d^n : e^n$ olur. Ve n üssü kere adet sahîh ve gerek kesîr olsun yine hüküm böyledir.

3.2.23. ❁ Tenâsüb-ü adediye beyanındadır. ❁

(134) Herhangi bir fazl-ı müşterek ile tezâyüd veyâ tenâkus eden kemmiyâta nisbet-i adediye üzere kemmiyât tesmiye olunup

Farazâ 1 ve 3 ve 5 ve 7 ve 9 ve lh

b ve $b + d$ ve $b + 2\, d$ ve $b + 3\, d$ ve lh

b ve $b - d$ ve $b - 2\, d$ ve $b - 3\, d$ ve lh

kemmiyetleri nisbet-i adedi üzere olarak bundan zâhir olur ki, eğer b kemmiyeti hadd-ı evvel olsa ve $b + d$ hadd-ı sâni ve $b + 2\, d$ hadd-ı sâlise ve $b + 3\, d$ hadd-ı rabia ve $b + (n - 1)\, d$ yani nununcu haddi olmuş olur.

(135) Nisbet-i adedi üzere bulunan kemmiyât-ı müteselsilenin hadd-ı evveliyle hadd-ı ahiri memuʿı adet-i hudûdun nısfına darb olundukta hâsıl-ı darb kemmiyât-ı mezkûre mecmûʿna müsâvî olur.

Farazâ b hadd-ı evvel d fazl-ı müşterek n adet-i hudûd l hadd-ı ahir m hudûd-u müteselsile mecmûʿ olsa

bu sûretde $b + (b + d) + (b + 2 d) + \ldots\ldots\ldots\ldots + l = m$

ve keza $l + (l - d) + (l - 2 d) + \ldots\ldots\ldots\ldots + b = m$

işbu iki silsile cemʿı olundukta

$(b + l) + (b + l) + (b + l) + \ldots\ldots\ldots\ldots$ n adet-i hudûda değin $= 2 m$

yahud $(b + l) n = 2 m$

$\therefore \quad m = (b + l) n / 2$

Netice 1 çünkü $l = b + (n - l) d$ olmağın l hadd-ı ahirin işbu müsâvîsi bâlâda istihrâc olunan düstûrda mahaline ikâme olundukta

$m = \{ 2 b + (n - l) d \} n /2$ olur.

Netice 2 işbu m ve b ve n ve d kemmiyât-ı erbaʿadan herhangi üçü mʿalum olsa dördüncü işbu $m = \{ 2 b + (n - l) d \} n /2$ düstûr vasıtasıyla istihrâc olunabilir.

Misâl 1 işbu 1 ve 3 ve 5 ve 7 ve lh silsilenin 14 haddının mecmûʿnı istihrâc murâd olunsa bu bâbda

$b = 1$ ve $d = 2$ ve $n = 14$ olmağın bu takdirce

$m = (2 + 26) \text{ x } 14 /2 = 196$

Misâl 2 işbu 11 ve 9 ve 7 ve 5 ve lh silsilenin 9 haddının mecmûʿnı istihrâc murâd olunsa

işbu misâlde $b = 11$ ve $d = - 2$ ve $n = 9$ olunmagın bu takdirce

$m = (22 - 16) \times 9 /2 = 27$

Misâl 3 Bir nisbet-i adediyenin hadd-ı evveli 14 ve sekiz haddi mecmûʿ 28 olduğu malum olarak fazl-ı müşterek ile silsilenin kendisi matlûb olsa çünkü,

$\{ 2 b + (n - l) d \} n /2 = m$ olmağın

$2 b + (n - l) d = 2 m / n$

$(n - l) d = 2 m / n - 2 b = 2 m - 2 b n / n$

$\therefore \quad d = 2 m - 2 b n / n (n - l)$

işbu misâlde $m = 28$ ve $b = 14$ ve $n = 8$ olunmagın

$\therefore \quad d = 56 - 224 / 8 \times 7 = 7 - 28 / 7 = - 3$

olup bu takdirce silsile-i matlûba 14 ve 11 ve 8 ve 5 ve lh olmuş olur.

Misâl 4 Bir silsile-i adedinin hadd-ı evveli $3\frac{1}{3}$ ve fazl-ı müştereki $1\frac{4}{9}$ ve hadleri mecmûʿ 22 olduğu mʿalum olarak adet-i hudûdu matlûb olsa

umûmen $m = \{ 2b + (n - l) d \} n/2$ olup misâle tatbik olundukta

$m = 22 \quad b = 3\frac{1}{3} \quad d = 1\frac{4}{9}$

$\therefore \quad 22 = \{ \frac{20}{3} + \frac{(n-1)13}{9} \} n/2$

yahud $396 = 47n + 13n^2$

olmağın işbu derece-i sâniye muʿâdelesi hal olunarak n mechûlünün kıymeti istihrâc berle adet hudûdun 4 olduğu tebeyyün eder. İmdi işbu misâlde ve buna mümâsil emsele-i sâirede farzımıza nazaran *n* kemmiyetinin menfî olan kıymetden sarf-ı nazar olunur.

(136) Bir silsile-i adediyenin evveliyle ahirinden müsâvî badete ahz olunan herhangi iki haddı mecmûʿ hadd-ı evveliyie hadd-ı ahiri mecmûʿna müsâvîdir. İşbu dava yüz otuz beşinci maddede ispat olunmuş ise de vech-i âtî üzere dahi ispat olunabilir.

Şöyle ki b ve c ve d ve e ve v ve q ve y kemmiyetleri silsile-i adedi üzere bulunsalar silsile-i adediyenin tarifiyle

$c - b = y - q$ yahud $c + q = b + y$ olup ve yine

$d - c = q - v$ olduğundan

$d + v = c + q = b + y$ ve bu minval üzere silsile-i adediyenin hudûdu her kaç adet olur ise cümlesi bu vechle ispat olunur.

(137) Bir silsile-i adediyenin adet-i hudûdu ferd olur ise hadd-ı vasatın zıʿfî hadd-ı evvel ile hadd-ı ahîr mecmûʿna müsâvîdir.

Meselâ k harfiyle hadd-ı vasat ve q r harfiyle dahi ânî vely eden hadler işʿâr olunsa silsile-i adediyenin tarifinden $q - k = k - r$ olmağın $2k = q + r$ olup q ve r kemmiyetleri silsile-i mezkûrenin evvel ve âhîrinden müsâvî mertebede hadler olduğundan $q + r = b + l$ akdemki dava ile ve $2k = b + l$ olup matlûb hâsıl olur.

(138) Zikr-i sebkat eden iki davanın iʿânesiyle silsile-i adediyenin cemʿi bazan kabul-ü teshîl olunabilir. Şöyle ki, mecmûʿ matlûb olan silsile-i adediyenin adet-i hudûdu zevç olup ve nısfından ziyade hadleri maʿlum olsa mecmûʿ matlûbun istihrâcî için silsile-i mezkûrenin ibtida ve intihasından müsâvî baʿde de vâkıʿ hadler cemʿ olunması hadd-ı ahîr yahud tafâzalin istihrâcından âsân olur. Eğer adet-i hudûdu ferd olup hadd-

ı vasat hudûdu maʿlûmanın biri ise ânifen ispat olunduğu üzere hadd-ı vasat adet-i hudûda darb olundukta yine mecmûʿ matlûb hâsıl olur.

Misâl 1 Mecmûʿ matlûb olan işbu

$\frac{2}{3}+\frac{7}{15}+\frac{4}{15}+\frac{1}{15}+lh$ 7 hudûda değin silsilede 1/15 hadd-ı vasat olduğundan mecmûʿ matlûb $=\frac{1}{15}\times 7=\frac{7}{15}$ olur.

Misâl 2 Mecmûʿ matlûb olan işbu

$1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+lh$ 6 hudûda değin silsilede üçüncü ve dördüncü hadler ibtida ve intihasından müsâvî baʿde de vâkıʿ olduklarından

mecmûʿ matlûb $=\left(2+\frac{5}{2}\right)\times\ 3=\frac{27}{2}=13\,\frac{1}{2}$ olur.

3.2.24. ❁ Tenâsüb-ü hendesiye beyanındadır. ❁

(139) Malum ola ki, herhangi kemmiyât-ı müteaddideden birincinin ikinciye nisbeti ikincinin üçüncüye nisbeti gibi olup ve ikincinin üçüncüye nisbeti üçüncünün dördüncüye nisbeti gibi yani her bir had ânî vely eden haddın herhangi izʿâfı veya cüzü oldukta kemmiyât-ı mezkûreye silsile-i hendesiye üzere yahud tenâsüb-ü mütevâliye-i hendesiye üzere kemmiyât denilir.

Meselâ b hadd-ı evvel ve $b\,r$ hadd-ı sâni olsa silsile b ve $b\,r$ ve $b\,r^2$ ve $b\,r^3$ ve $b\,r^4$ ve lh olur. Zirâ, $b : b\,r\ ::\ b\,r^2 : b\,r^3 ::\ b\,r^4 : b\,r^5$ ve lh olur.

(140) Her bir had mâ tekaddümü olan haddın madrûb-u daimi ile hâsıl-ı darbından ibaret olup işbu madrûb-u daimiye nisbet-i müşterek tesmiye olunup hadd-ı sâni hadd-ı evvel üzerine yahud herhangi bir had ânî tekaddüm eden haddın üzerine taksîm olunmakla tahsîl olunabilir.

(141) Silsile-i hendesi üzere bulunan kemmiyât-ı müteaddedenin mecmûʿnın istihrâcî matlûbdur. Farazâ b hadd-ı evvel 7 nisbet-i müşterek n adet-i hudûd m silsile-i mezkûrenin hadleri mecmûʿ oldukta

$$m = b + b\,r + b\,r^2 + b\,r^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; b\,r^{n-2} + b\,r^{n-1}$$

$$r\,m = b\,r + b\,r^2 + b\,r^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; b\,r^{n-2} + b\,r^{n-1} + b\,r^{n}$$

olup silsile-i evvel sâniyeden tarh olundukta

$$r\,m - m = b\,r^{n} - b$$

$$\therefore\quad m = \frac{b\,r\,n-b}{r\ m-m} = b\ \frac{r\,n-1}{r-1}$$

olup mecmûʿ matlûb için bir düstûr-u umûmi hâsıl olmuş olur.

Netice 1 eğer l harfiyle hadd-ı ahîr işʿâr olunsa $l = b\, r^{n-1}$ olmağın bu takdirce $m = \frac{r\ l\ -\ b}{r\ -\ 1}$ olup işbu muʿadeleden m ve r ve l ve b kemmiyât-ı erbaʿanın herhangi üçü mʿalum olsa dördüncü istihrâc olunabilir.

Netice 2 ânifen farz olunan r kemmiyeti bir kesr-i sahîh olsa n tezâyüd ittikçe r^n yahud $b\, r^n$ kemmiyetinin miktarı tenâkus edip vakta ki, n nâ mütenâhi oldukta $b\, r^n$ kemmiyeti gayet tenâkus edip mecmûʿ $b\, r^n - r\ /\ l - r$ kemmiyetine müsâvî olan silsilenin bu babda mecmûʿ $- b / r - l$ yani $b / l - r$ olmuş olur.

Kaldı ki, işbu $b / l - r$ kemmiyeti zikr olunan silsilenin mecmûʿ taʿbîr olunmuş ise de mecmûʿ olmayıp hadleri mecmûʿna akreb müsâvî olduğundan mecmûʿ mezkûru sahîhen irâe eder. Zirâ silsile-i mezkûre b kemmiyetinin $l - r$ kemmiyeti üzerine taksîminden hâsıl olarak mecmûʿ matlûb mahaline $b / l - r$ kemmiyeti hatasız ikâme olunabilir.

Misâl 1

1 ve 2 ve 3 ve 4 ve 8 ve lh silsilenin yirmi haddinin mecmûʿ matlûbdur.

Bu mahalde $b = 1$ $r = 2$ $n = 20$ olmağın bu ecelden

$m = (1 \times 2^{20} - 1) / (2 - 1) = 2^{20} - 1$

Misâl 2

İşbu 64 ve 16 ve 4 ve lh silsilenin 12 haddinin mecmûʿ matlûbdur.

Bu mahalde $b = 64$ $r = 1/4$ $n = 12$

$\therefore \quad m = 64\, \frac{\left(\frac{1}{4}\right)12\ -1}{\frac{1}{4} - 1} = (\ 4^3 / 4^{11}\ ).\ (4^{12} - 1) / (4–1) = 1/4^8\ .\ (4^{12} - 1) / 3$

Misâl 3

İşbu 1 ve – 3 ve 9 ve – 27 ve lh silsilenin 12 haddinin mecmûʿ matlûbdur.

Bu mahalde $b = 1$ $r = -3$ $n = 12$

$\therefore \quad m = (-3)^{12} - 1 / -3 - 1 = -3^{12} - 1/ 4$

Misâl 4

İşbu 1 – 1/2 + 1/4 – 1/8 + lh silsile-i hendesiye nâ mütenâhiyenin mecmûʿ matlûbdur.

Bu mahalde $b = 1$ $r = -1/2$

$\therefore \quad m = 1 / (1 + 1/2) = 2/3$ olur.

3.2.25. ❁ Evzâʿ ve terkîbât beyanındadır. ❁

(142) Kemmiyât-ı müteaddedenin tertipât-ı muhtelife üzere tanzimlerine ol kemmiyâtın evzâʿ tesmiye olunur. Şöyle ki, b ve c ve d mekâdir-i selasenin ikişer ikişer ahz olunarak evzâʿ b c ve c b ve b d ve d b ve c d ve d c olur.

(143) Kemmiyâtın nizâm ve evzâʿına riâyet olunmaksızın kemmiyât-ı mezkûreden teşkil olunan tecemmuât-ı muhtelifeye ol kemmiyâtın terkîbi tesmiye olunur. Şöyle ki, b ve c ve d kemmiyetlerinin ikişer ikişer ahz olunarak terkîbleri b c ve b d ve c d olup b c ve c b her ne kadar vazʿca muhtelif iseler de terkîbde ikisi dahi birbirinin aynı olmuş olur.

(144) n adet kemmiyâtdan ikişer ikişer ahz olunarak n $(n - 1)$ adet vazʿ teşkil olunabilüb ve üçer üçer ahz olunarak n $(n - 1)$ $(n - 2)$ adet vazʿ teşkil olunur. Farazâ b ve c ve d ve e ve v ve lh misillü n kadar kemmiyâtdan beherinin evveline b vazʿ olunarak bu vechle $n - 1$ adet vazʿ teşkil olunduğu gibi yine n adet kemmiyâtdan beherinin evveline c vazʿ olunarak $n - 1$ adet vazʿ teşkil olunur. Ve kıs âleyh'i-l bevâkî bu sûretde kemmiyât-ı mezkûreden b c ve c b ve c d ve d c ve lh evzâʿ misillü n $(n - 1)$ adet vazʿ hâdis olur. Ve yine c ve d ve e yani $n - 1$ kemmiyâtdan ikişer ikişer ahz olunarak bâlâda beyan olunduğu üzere $(n - 1)$ $(n - 2)$ vazʿ hâsıl olup işbu evzâʿ-ı müteaddedenin herbirinin evveline b vazʿ olunarak üçer üçer ahz olunmuş $(n - 1)$ $(n - 2)$ vazʿ hâsıl olur ki herbirinin evvelinde b bulunmuş olur. Ve bu minval üzere c ve d ve e ve lh hurûfâtından herbiri evveline tahrîr olunmuş olarak hurûfât-ı mezkûrenin beheri için $(n - 1)$ $(n - 2)$ vazʿ hâsıl olup ve hurûfât-ı merkûmenin adedi n olduğundan cümlesi için üçerli olarak n $(n - 1)$ $(n - 2)$ evzâʿ hâdis olup matlûb hâsıl olur.

(145) r adedi birden ahz olunan n adet hurûf için vazʿ istihrâc etmek murâd olunsa (madde 144) beyan olunduğu üzere hurûfât-ı mezkûre

ikişer ikişer ahz olunarak = n $(n - 1)$

üçer üçer ahz olunarak = n $(n - 1)$ $(n - 2)$

ve keza dörder dörder ahz olunarak = n $(n - 1)$ $(n - 2)$ $(n - 3)$

adet-i vazʿ hâdis olup bundan zâhir ve aşikâr olan kanun-i umûmî olduğu farz olunarak b ve c ve d ve e ve lh yani n adet-i kemmiyâtın $(r - 1)$ adedinin birden ahzıyla n $(n - 1)$ $(n - 2)$ ……… . $(n - r + 2)$ vazʿ hâsıl olup b terk olundukta bâkî kalan c ve d ve e ve lh yani $n - 1$ kemmiyâtın $r - 1$ adedi birden ahz olunarak

$(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots.(n-r+1)$ vazʿî hâdis olmağın her birinin evveline b vazʿ olundukta *r* adedi birden ahz olunmuş bir takım evzâʿ hâsıl olur ki her birinin evvelinde *b* bulunub ve adedi dahi $(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots.(n-r+1)$ olmuş olur. Ve *c* için dahi bu kadar adet-i evzâʿ bulunub her birinin evvelinde *c* bulunur. Bu takdirce *r* adedi birden ahz olunmak üzere *n* adet-i kemmiyâtdan ahzı mümkün olan adet-i evzâʿ $n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots.(n-r+1)$ olup matlûb hâsıl olur.

Netice cümlesi birden ahz olunan *n* adet kemmiyâtın adet-i terkîbi

$n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots.(n-n+1)$

$= n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots.3\times 2\times 1$ yahud

$= 1\times2\times3\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ n$ olur.

(146) *n* adet eşyadan ikişer ikişer teşkili mümkün olan adet-i terkîbat $n\,\frac{n-1}{2}$ ve üçer üçer $n\,\frac{n-1}{2}\ \frac{n-1}{3}$ olur. Çünkü *n* adet kemmiyâtın ikişer ikişer vazʿî $n\ (n-1)$ olup halbu ki *b c* misillü herbir terkîbin *b c* ve *c b* olarak iki vazʿ olmağın bu ecelden adet-i vazʿ adet-i terkîbin iki misli olmakla *n* adet kemmiyâtın ikişer ikişer terkîbi $n\,\frac{n-1}{2}$ $\frac{n-1}{3}$ olmuş olur.

Ve yine *n* adet kemmiyâtın üçer üçer adet-i vazʿ $n\ (n-1)\ (n-2)$ olup üç kemmiyetin üçer üçer vazʿ 3×2×1 olduğundan (madde 145 netice) bu bâbda adet-i vazʿ adet-i terkîbin 3x2x1 misli olmuş olarak *n* adet kemmiyâtın üçer üçer terkîbi $\frac{n\ (n-1)(n-2)}{1x2x3}$ olmuş olur.

(147) *n* adet kemmiyâtın *r* adedi birden ahz olunmak üzere adet-i terkîbin istihrâcı murâd olunsa *n* adet kemmiyâtın *r* adedi birden ahz olunmak üzere adet-i vazʿ

$= n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots.(n-r+1)$ olup lakin *r* adet kemmiyâtın cümlesi birden ahz olunarak hâdis olan adet-i vazʿ (madde 145 netice)

$1\times2\times3\times\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ r$ olmakla bu bâbda dahi adet-i vazʿ adet-i terkîbden

$1\times2\times3\times\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ r$ defa ziyade olarak *n* adet kemmiyâtın *r* adedi birden ahz olunmak üzere adet-i terkîbi

$\frac{n\ (n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)}{1\times2\times3\times\ldots\ldots\ r}$ olmuş olur.

❁ Zû hadeyn beyanındadır. ❁

(148) Madrûb-u mükerrere ile herhangi bir zû hadeynin kuvveti matlûbeye rafiʿ (madde 57) vazʿ ve te'sis olunan kâide mevcubunca olur ise de zîrde beyan olunacak kaideye zû hadeyn kaidesi tesmiye olunur ki tarîk-ı umûmi vasıtasıyla amel-i rafiʿ dahi âsân vechle icrâ olunabilir. Farazâ $x + b$ herhangi bir zû hadeyni işʿâr eylese işbu zû hadeynin n kuvvete rafiʿ

$x^{n} + n\,b\,x^{n-1} + n\,\frac{n-1}{2}\,b^{2}x^{n-2} + n\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,b^{3}x^{n-3}$ + lh olur ki x kemmiyetinin üsleri n den bedee ile beher hadde vâhid tenâkus edip ve b kemmiyetinin üsleri sıfırdan bedee ile hudûd mütevâliyede vâhid tezâyüd eder. Ve keza her bir haddin emsâli ânî tekaddüm eden haddin emsalinin x kemmiyeti üssüne darbın hâsılının yine ol hadde bulunan b kemmiyetinin üssüne vâhid zam ile işbu mecmûʿ üzerine taksîmin hâric-i kısmetine müsâvî olur.

Şöyle ki, $(x + b)^{6} = x^{6} + 6\,b\,x^{5} + \frac{6\times5}{1\times2}\,b^{2}x^{4} + \frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}\,b^{3}x^{3} + \frac{6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4}\,b^{4}x^{2} + \frac{6\,x\,5\,x\,4\,x\,3\,x\,2}{1\,x\,2\,x\,3\,x\,4\,x\,5}\,b^{5}x + \frac{6\,x\,5\,x\,4\,x\,3\,x\,2\,x\,1}{1\,x\,2\,x\,3\,x\,4\,x\,5\,x\,6}\,b^{6}$

$= x^{6} + 6\,b\,x^{5} + 15\,b^{2}x^{4} + 20\,b^{3}x^{3} + 15\,b^{4}x^{2} + 6\,b^{5}x + b^{6}$ olduğu gibi.

(149) Adet-i sahîh ve müsbet üs için zû hadeyn kaidesi beyanındadır. Şöyle ki, adet-i darb amelinden zâhir olunduğu üzere

$(x + b)\,(x + c) = x^{2} + (b + c)\,x + b\,c$

$(x + b)\,(x + c)\,(x + d) = x^{3} + (b + c + d)\,x^{2} + (b\,c + b\,d + c\,d)\,x + b\,c\,d$

$(x + b)\,(x + c)\,(x + d)\,(x + e) = x^{4} + (b + c + d + e)\,x^{3} + (b\,c + b\,d + c\,d + b\,e + c\,e + d\,e)\,x^{2} + (b\,d\,c + b\,d\,e + c\,d\,e + b\,c\,e)\,x + b\,c\,d\,e$

olup birbirleriyle darb olunan işbu $x + b$ ve $x + c$ ve $x + d$ + lh zû hadeyn madrûblarının adedi her kaç olur ise olsun hâsıl-ı darbı teşkil zımmınında bâlâda icrâ olunan kâide dâimâ cârî olur. Yani hâsıl-ı darb x kemmiyetinin kuvvâ-i mütevâliye-i mütenâkısalarından ibaret olarak kuvve-i âliyesi madrûblarının adedine müsâvî ve kuvvâ-i bâkiyesi dahi beher hadde vâhid ile mütenâkıs olur. Ve keza hadd-ı evvelin emsâli vâhid ve hadd-ı sâniyenin emsâli dahi $b\,c\,d\,e$ lh kemmiyetleri mecmûʿ ve hadd-ı salisenin emsâli beher ikisinin hâsıl-ı darbı mecmûʿ ve hadd-ı rabian emsâli beher üçünün hâsıl-ı darbı mecmûʿ ve hakeza bu vechle olarak hadd-ı ahiri dahi n adetden ibaret olan $b\,c\,d\,e$ lh kemmiyetlerinin cümlesinin hâsıl-ı darbı mecmûʿ olur. Bu sûretde işbu kaide n adet madrûb için cârî olacağı farz olundukta

$(x + b)\ (x + c)\ (x + d) \ldots\ldots (x + q) = x^{n} + b^{/} x^{n-1} + c^{/} x^{n-2} + d^{/} x^{n-3} + q^{/}$ olup işbu düstûrda

$b^{/} = b + c + d + \ldots\ldots\ldots\ldots + q$

$c^{/} = b\,c + b\,d + c\,d + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$d^{/} = b\,c\,d + b\,d\,e + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$q^{/} = b\,c\,d\,e \ldots\ldots\ldots\ldots$ olmağın $b\ c\ d\ e$ miktarlarının cümlesi b farz olundukta

$b^{/} = b + b + b +$ lh n adet hudûda değin $= n\,b$

$c^{/} = b^{2} + b^{2} + b^{2} +$ lh n adet kemmiyâtın ikişer ikişer ahz olunarak adet-i terkîbi miktarı adet-i hudûda değin $= n\ \frac{n-1}{2}\ b^{2}$

$d^{/} = b^{3} + b^{3} + b^{3} +$ lh n adet-i kemmiyâtın üçer üçer ahz olunarak adet-i terkîbi miktarı adet-i hudûda değin $= n\ \frac{(n-1)(n-2)}{2 \times 3}\ b^{3}$ lh = lh

$q^{/} = b \times b \times b \ldots\ldots\ldots$ n adet madrûba hâsıl-ı darbı $= b^{n}$

ve keza $(x + b)\ (x + c)\ (x + d) \ldots\ldots (x + q)$ hâsıl-ı darbı $= (x + b)^{n}$

bu takdirce

$(x + b)^{n} = x^{n} + n\,b\,x^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{1 \times 2} b^{2} x^{n-2} + \frac{n\,(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} b^{3} x^{n-3} + \ldots\ldots + b^{n}$

Netice $(1 + x)^{n} = 1 + n\,x + \frac{n\,(n-1)}{1 \times 2} x^{2} + \frac{n\,(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} x^{3} +$ lh

Misâl 1

$(b + c)^{8}$ zû hadeynin rafi‘ matlûbdur.

$(b + c)^{8} = b^{8} + 8\,b^{8-1}\,c + 8\,(8-1) / 2\ b^{8-2}\,c^{2} + 8\,(8-1)\,(8-2) / 2\times3\ b^{8-3}\,c^{3} + 8\,(8-1)\,(8-2)\,(8-3) / 2\times3\times4\ b^{8-4}\,c^{4} + 8\,(8-1)\,(8-2)\,(8-3)\,(8-4) / 2\times3\times4\times5\ b^{8-5}\,c^{5} + 8\,(8-1)\,(8-2)\,(8-3)\,(8-4)\,(8-5) / 2\times3\times4\times5\times6\ b^{8-6}\,c^{6} + 8\,(8-1)\,(8-2)\,(8-3)\,(8-4)\,(8-5)\,(8-6) / 2\times3\times4\times5\times6\times7\ b^{8-7}\,c^{7} + 8\,(8-1)\,(8-2)\,(8-3)\,(8-4)\,(8-5)\,(8-6)\,(8-7) / 2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\ b^{8-8}\,c^{8}$

$= b^{8} + 8\,b^{7}\,c + 28\,b^{6}\,c^{2} + 56\,b^{5}\,c^{3} + 70\,b^{4}\,c^{4} + 56\,b^{3}\,c^{5} + 28\,b^{2}\,c^{6} + 8\,b\,c^{7} + c^{8}$

Misâl 2

$(b^{2} + x^{2})^{n}$ zû hadeynin rafi‘ matlûbdur.

$(b^{2} + x^{2})^{n} = b^{2n} + n\,b^{2n-2}\,x^{2} + \frac{n\,(n-1)}{2} b^{2n-4}\,x^{4} +$ lh

Misâl 3

$(1 + x)^{1/n}$ zû hadeynin rafi‘ matlûbdur.

$(1+x)^{1/n} = 1 + 1/n\,x + \frac{1/n\,(1/n-1)}{2} x^2 + \frac{1/n\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{2\times 3} x^3 + \text{lh}$

$= 1 + 1/n\,x - \frac{(n-1)}{2\,n2} x^2 + \frac{(n-1)(2n-1)}{2\times 3\times n\,3} x^3 + \text{lh}$

Misâl 4

$(1+x)^{-1/n}$ zû hadeynin rafiʿ matlûbdur.

$(1+x)^{-1/n} = 1 - 1/n\,x + \frac{(n+1)}{2\,n2} x^2 - \frac{(n+1)(2n+1)}{2\times 3\times n\,3} x^3 + \text{lh}$

(150) Eğer bir zû hadeynin hadlerinden biri menfî olsa ol haddin ferd olan kuvvetleri menfî olmağın hâsıl-ı rafʿinde işbu ferd kuvvetlerin dahil olduğu hadler dahi menfî olurlar.

Misâl 5

$(1-x)^{n} = 1 - n\,x + \frac{n\,(n-1)}{2} x^2 - \frac{n\,(n-1)(n-2)}{2\times 3} x^3 + \text{lh}$

(151) Eğer bir zû hadeynin rafʿi olunacağı kuvvet menfî olup hadlerinden biri dahi menfî olsa hâsıl-ı rafʿinda bulunan işaretlerin cümlesi müsbet olur.

Misâl 6

$(1-x)^{-n} = 1 + n\,x + \frac{n\,(n+1)}{2} x^2 + \frac{n\,(n+1)(n+2)}{2\times 3} x^3 + \text{lh}$

(152) $(x+b)^{n}$ zû hadeynin rafʿinda hadd-ı umûminin istihrâcî matlûbdur.

Hadd-ı evvel x^{n}

Hadd-ı sânî $n\ b^{1}\, x^{n-1}$

Hadd-ı sâlise $n\ \frac{n-1}{2}\, b^{2}\, x^{n-2}$

Hadd-ı râbia $n\ \frac{n-1}{2}\ \frac{n-2}{3}\ b^{3}\, x^{n-3}$

bundan zâhir olur ki beher haddin emsâli $\frac{n}{1}\ \frac{n-2}{2}\ \frac{n-3}{3}$ madrûblarından müşekkel olup ve beher hadde bulunan adet-i madrûb adet-i hudûddan vâhid nâkıs olur. Bu takdirce r haddin emsâli

$\frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r-1)}{1\times 2\times 3\times\ldots..(r-1)}$

olup ve keza b kemmiyetinin üssü emsâlinde bulunan madrûblardan madrûb-u ahirin mahrecine müsâvî ve x kemmiyetinin üssü n ile b kemmiyetinin üssü beynindeki tefazule müsâvî olduğundan kâmilen r haddi

$\frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+2)}{1\times 2\times 3\times\ldots..(r-1)}\, b^{r-1}\, x^{n-r+1}$

olmuş olup işbu ifade-i cebriyede r mahaline bir adet mefrûd ikâme olundukta herhangi bir hâsıl-ı rafʿin yalnız bir hadd-ı matlûbu istihrâc olunabilir.

Misâl işbu $(b^{2} - c^{2})^{12}$ zû hadeynin beşinci haddi matlûbdur.

Bu bâbda $x = 5 \quad n = 12$ olmağın

$\therefore$ hadd-ı matlûb $= \frac{12\times11\times10\times9}{1\times2\times3\times4} (- c^{2})^{4} (b^{2})^{8} = 495\, b^{16} c^{8}$

(153) Herhangi hâsıl-ı rafʿin adet-i hudûdunu istihrâc etmek murâd olunsa $(x + b)^{n}$ zû hadeynin $r + 1$ haddi

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1\times2\times3\times\ldots\ldots r} b^{r} x^{n-r}$$

olup r haddi $n - r + 1$ vâkıʿ olarak sıfıra müsâvî olsa yani n müsbet olup adet-i sahîh olduğu halde $r = n + 1$ olsa r hudûdundan mâadâ had olmayıb adet-i hudûd dahi $n + 1$ olarak zikr olunan zû hadeynin üssünden bir ziyade olur. Ve eğer n menfî yahud kesr olsa çünkü r bir adet-i sahîh müsbet olması lazım geldiğinden r kemmiyetinin hiçbir kıymeti $n - r + 1$ zû hudûd selasesini sıfıra ircâ idemeyub bu ecelden adet-i hudûd dahi gayri mahdûd olmuş olur.

Şöyle ki, işbu $(x + b)^{3}$ ve $(x + b)^{7}$ zû hadeynlerin hâsıl-ı rafiʿıları 4 ve 8 hadlerinden ibaret olup halbu ki $(x + b)^{-2}$ yahud $(x + b)^{1/2}$ zû hadeynlerin hâsıl-ı rafiʿalarının adet-i hudûdları gayri mahdûd yahud ziyadesiyle azam olmuş olur.

(154) Rafiʿ olunmuş bir zû hadeynin üssü adet-i sahîh müsbet olsa hâsıl-ı rafiʿın evvelinden ve ahirinden müsâvî bade de ahz olunan hadlerin üssü mezkûr vasıtasıyla müşekkel olan emsalleri birbirinin aynı olduğundan ispatı murâd olunsa çünkü adet-i hudûd $n + 1$ olmağın ahirinden $r + 1$ hadd-ı evvelinden $n - r + 1$ had olduğundan emsali (madde 152) istihrâc olunan ifade-i cebriyede r mahaline $n - r + 1$ vazʿ olundukta

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-n-1)}{1\times2\times3\times\ldots\ldots(n-r)}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(r+1)}{1\times2\times3\times\ldots\ldots(n-r)}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)\ldots\ldots(r+1)}{1\times2\times3\times\ldots\ldots r\times(r+1)\ldots\ldots(n-r)}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)}{1\times2\times3\times\ldots\ldots\ldots r}$$

evvelinden $r + 1$ haddın emsali olur.

Netice üssü adet-i sahîh ve müsbet olan bir zû hadeynin rafiʿında hâsıl-ı rafiʿın nısf-ı ahiri nısf-ı evvelinden ahz olunabilir.

Misâl $(b + c)^7$ zû hadeynin rafiʿ matlûbdur.

Bu babda adet-i hudûd 8 olmağın yalnız dördüncü haddin emsaline değin hesap olunmak lazım gelir.

$\therefore\ (b + c)^7 = b^7 + 7\, b^6 c + 7x6/1x2\ b^5 c^2 + 7x6x5/1x2x3\ b^4 c^3 +$ lh

$= b^7 + 7\, b^6 c + 21\, b^5 c^2 + 35\, b^4 c^3 + 35\, b^3 c^4 + 21\, b^2 c^5 + 7\, b\, c^6 + c^7$

(155) $(b + c)^n$ zû hadeynin hâsıl-ı rafiʿında hadd-ı azamı istihrâc etmenin tarîki evvela hâsıl-ı rafiʿın $r + 1$ haddi

$$\frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1\times 2\times 3\times\ldots\ldots r}\, b^{n-r}\, c^{r}$$

olup r haddi dahi

$$\frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+2)}{1\times 2\times 3\times\ldots\ldots(r-1)}\, b^{n-r+1}\, c^{r-1}$$

olmağın bu sûretde r haddinden $r + 1$ haddin istihrâcı zımnında işbu $r + 1$ had $n - r + 1 / r \quad c / b$ kemmiyetiyle darb olunur.

Binâenaleyh r haddin azameti $(n - r + 1)/ r \quad c / b$ kesrinin vahidden asgarî olmasına tevakkuf eder.

yahud $(n - r + 1)\, c < b\, r$

yahud $r\, (b + c) > (n + 1)\, c$

yahud $r > (n + 1) \quad c / b + c$

bu takdirce r kemmiyeti $(n + 1) \quad c / b + c$ ifadesinden azam olan ibtidâ ki adet-i sahîh farz olundukta hadd-ı mefrûd mezkûr hadd-ı azam olur.

Ve eğer $(n + 1) \quad c / b + c$ bir adet-i sahîh olmuş olsa hâsıl-ı rafiʿın iki haddi birbirine müsâvî olup işbu hadeynden her biri hudûd-u bâkîyeden azam olur. Netice bu vechle hadd-ı azamı tayin etmekle hâsıl-ı rafiʿın hadleri hangi hadden tenâkus itmeğe bed' eylediği malum olur. Yani hâsıl-ı rafiʿı hangi noktadan tenâzil itmeğe mübâşeret eylediği malum olur.

Misâl işbu $(3+5\,x)^8$ zû hadeynde $x = 1/2$ olduğu halde hâsıl-ı rafiʿında hangi haddin azam olduğunu istiʿlâm etmek matlûbdur.

Bu bâbda $(n + 1)\, c / b + c = (8+1)\ 5/2 / 3+5/2 = 9 \times 5/11 = 45/11 = 4\,\frac{1}{11}$

$4\frac{1}{11}$ adet-i sahîh meʿa'l-kesîrden azam olan ibtidâ ki adet-i sahîh 5 olmağın bu sûretde hadd-ı matlûb beşinci had olmuş olur.

(156) Herhangi bir hâsıl-ı rafiʿın emsalleri mecmûʿnı istihrâc etmenin tarîkıdır. Çünkü x kemmiyetinin her bir kıymeti için

$(1+x)^{n} = 1+nx+n(n-1)/2\,x^{2} + \text{lh}$

$(1-x)^{n} = 1-nx+n(n-1)/2\,x^{2} - \text{lh}$

olmağın işbu silsilede x = 1 farz olundukta

$(1+1)^{n} = 1+n+n(n-1)/2+n(n-1)(n-2)/2\times3 + \text{lh}$

2^{n} = emsalleri mecmûʿ

$(1-1)^{n} = (0)^{n} = 1-n+n(n-1)/2 - \text{lh}$ olup yani müsbet hadlerin emsalleri mecmûʿ menfî hadlerin emsalleri mecmûʿna müsâvî olur.

Misâl $(x+b)^{5} = x^{5} + 5bx^{4} + 10b^{2}x^{3} + 10b^{3}x^{2} + 5b^{4}x + b^{5}$

olup ve emsalleri mecmûʿ = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^{5}

(157) Zû hadeyn kaidesiyle adâdın cezr-i takribilerini istihrâc etmenin tarîkidir. Evvela kaide-i mezkûre ile

$\sqrt[n]{1+x} = (1+x)^{1/n} = 1+\frac{1}{n}x - \frac{1}{n}\frac{n-1}{2n}x^{2} + \ldots\ldots\ldots$

olup q harfiyle n kuvvetden cezri matlûb olan adet işʿâr olunarak e harfiyle dahi şol bir adet işʿâr oluna ki $e^{n} < q \quad d\,(e+1)^{n} > q$ bu ecelden $q = e^{n} + d$ olur. İşbu d adetdi e^{n} adedine nisbeten asgar olup $\sqrt[n]{q} = e\,(1+d/e^{n})^{1/n}$ olmağın bâlâda muharrer silsilede x mahaline d/e^{n} vazʿ birle

$= e\,(1+1/n\;\; d/e^{n} - 1/n\,(n-1)/2n\,(d/e^{n})^{2} + \ldots..)$ silsilesi hâdis olup işbu silsilenin yalnız birkaç haddi cezr-i matlûba akreb müsâvî olur.

Misâl işbu 128 adedin cezr-i mikabı takribi matlûbdur.

Bu bâbda $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{5^{3}+3} = 5\sqrt[3]{1+3/125}$

$= 5\,(1+\frac{1}{3}\frac{3}{125} - \frac{1}{3}\frac{1}{3}(\frac{3}{125})^{2} + \frac{1}{9}\frac{5}{9}(\frac{3}{125})^{3} - \ldots\ldots\ldots)$

$= 5 + 0{,}04 - 0{,}00032 + 0{,}0000042 - \ldots\ldots = 5{,}0396842$

(158) Bir zû hudûd selasenin mesela $b+c+d$ zû hudûd selasenin iki haddi bir had gibi tasvir olunarak zû hadeyn kaidesiyle herhangi bir kuvvete rafʿ olunabilir.

Şöyle ki,

$(b+c+d)^{n} = (b+c+d)^{n} = (b+c)^{n} + n\,(b+c)^{n-1}d + n\,(n-1)/2\,(b+c)^{n-2}d^{2} + \text{lh}$

İşbu hâsıl-ı rafiʿda $(b + c)$ zû hadeynin kuvveyi muhtelifesi tekrar zû hadeyn kaidesiyle istihrâc olunarak mahallerine ikame birle matlûb hâsıl olur.

Misâl işbu $1+ x + x^2$ zû hudûd selasenin mikaʿbı matlûbdur.

$(1+ x + x^2)^3 = (1+ x + x^2)^3 = (1+ x)^3 + 3 (1+ x)^2 x^2 + 3 (1+ x) x^4 + x^6$

$= 1+3x +3x^2 + x^3 +3x^2 +3x^3 +3x^4 +3x^4 + x^5 + x^6$

$= 1+3x +6x^2 +7x^3 +6x^4 +3x^5 + x^6$

Ve keza $(b + c + d + e)^n$ zû hudûd erbaʿasında $b + c$ ile $d + e$ zû hadeynleri birer had tasvir olunarak terfiʿ olunabilir. Ve bu minval üzere herhangi bir zû hudûd kesîrenin hadleri ikiye taksîm birle bir zû hadeyn gibi tasvir olunarak herhangi bir kuvvete rafiʿ olunur.

3.2.26. ❁ Davay-ı üs ❁

(159) b^x kemmiyetini x muhavvilinin kuvvey-i müteselsilesi vasıtasıyla terfiʿ etmek murâd olunsa

$b^x = \{ (1+ b - 1)^n\}^{x/n}$

$= \{ (1 + n) (b - 1) + n (n - 1) /2 (b - 1)^2 + n (n - 1) (n - 2) /2\times3 (b - 1)^3 + \text{lh} \}^{x/n}$

$= \{ 1 + [(b - 1) - (b - 1)^2 /2 + (b - 1)^3 /3 - \text{lh}]\, n + c' n^2 + d' n^3 +\ldots\text{lh} \}^{x/n}$

İşbu c ve d kemmiyetleri yalnız $b - 1$ zû hadeynin kuvvetlerini münderic oldukları halde $= \{ 1 + b' n + c' n^2 + d' n^3 + \text{lh} \}^{x/n}$

Ve eğer $(b - 1) - 1/2 (b - 1)^2 + \text{lh} = b'$

$= 1 + x / n (b' n + c' n^2 \ldots) + x / n (x / n - 1/2) ((b' n + c' n^2 \ldots) +\ldots$

$= 1 + x (b' n + c' n^2 \ldots) + x (x - n /2) ((b' n + c' n^2 \ldots) +\ldots$

Çünkü b^x kemmiyeti n kemmiyetine gayrı tabi olmağın n için herhangi bir kıymet farz olunabilir. Bu ecelden $n = 0$ farz olundukta

$\therefore \quad b^x = 1 + b' x + b'^2 x^2/ 1\times2 + b'^3 x^3/ 1\times2\times3 +\ldots$

Netice i harfi b kemmiyetinin şol bir kıymetini irae eylese ki bâlâda istihrâc olunmuş olan düstûrda b mahaline i vazʿ olundukta

$b = 1$ ola bu takdirce

$i^x = 1 + x / 1 + x^2/1\times2 + x^3/1\times2\times3 + \ldots$

olup $x = 1$ farz olundukta

$i = 1 + 1/1 + 1/1\times2 + 1/1\times2\times3 + \ldots = 2{,}71882818$

3.2.27. ❁ Kemmiyât-ı meczûrenin teczirleri beyanındadır. ❁

(160) Bir hadd-i asam diğer hadd-i muntak olan bir zû hadeynin cezr-i murabbaʿını istihrâc için seksen sekizinci maddede bir tarîk iʿtâ olunmuş ise de zîrde beyan olunacak tarîk dahi ziyade müstaʿmeldir.

(161) İşbu $b + \sqrt{c}$ sûretinde bulunan bir kemmiyetin cezr-i murabbaʿını istihrâc etmek murâd olunsa evvela $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{b + \sqrt{c}}$ farz olunup terbiʿ olundukta

$x + y + 2\sqrt{x\,y} = b + \sqrt{c}$

$\therefore\ \ x + y = b$

ve $2\sqrt{x\,y} = \sqrt{c}$ olmağın (madde 85)

işbu iki muâdeleden x ile y bir veche âtî istihsâl olur.

$x^2 + 2\,x\,y + y^2 = b^2$

$4\,x\,y = c$

$\therefore\ \ x^2 - 2\,x\,y + y^2 = b^2 - c$

$x - y = \sqrt{b^2 - c}$

ve $x + y = b$

$\therefore\ \ 2\,x = b + \sqrt{b^2 - c}$

ve $2\,y = b - \sqrt{b^2 - c}$

$x = (b + \sqrt{b^2 - c})/2$

ve $y = (b - \sqrt{b^2 - c})/2$

$\therefore\ \ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - c}}{2}} + \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - c}}{2}}$

bundan zâhir olur ki $b^2 - c^2$ kemmiyeti bir murabba-ı tam olsa $b + \sqrt{c}$ kemmiyetinin cezr-i murabbaʿı bir zû hadeyn ile ifade olunabilib zû hadeyn mezkûreynin haddini yahud hadd-ı vahidi kemmiyet-i asam murabbaʿı olur. Kaldı ki, cezr-i matlûb olan zû hadeyn $b - \sqrt{c}$ sûretinde olsa $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{b - \sqrt{c}}$ farz olunarak kemâ fi's-sâbık amel olunur. Bu dahi hafî olmaya ki bâlâda zikr olunan kaide bir hadd-i muntak ve diğer hadd-i asam olan zû hadeyn hakkında cârî olup lakin bir zû hadeynin işbu $\sqrt{d\,b}^{\,2} + \sqrt{c\,d}$ yahud $\sqrt{d}\,(b + \sqrt{c})$ sûretinde tahvil mümkün ise $b + \sqrt{c}$ zû hadeynin cezri ahz ve hâsıl-ı cezr $\sqrt[4]{d}$ kemmiyetiyle darb olunur.

Misâl işbu $3/2 + \sqrt{2}$ zû hadeynin cezr-i murabbaʿı matlûbdur.

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}$ farz olunup

Tarafeyn terbiʿ olundukta $x + 2\sqrt{x\,y} + y = 3/2 + \sqrt{2}$

$\therefore\ x + y = 3/2$

$2\sqrt{x\,y} = 2$

$x^2 + 2\,x\,y + y^2 = 9/4$

$4\,x\,y = 2$

$x^2 - 2\,x\,y + y^2 = 1/4$

$x - y = 1/2$

$x + y = 3/2$

$\therefore\ 2\,x = 2$ yahud $x = 1$

$2\,y = 1$ yahud $y = 1/2$

$\therefore\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cezr-i matlûb olur.

Misâl 2 işbu $\sqrt{27} + \sqrt{24}$ zû hadeynin cezr-i murabbaʿı matlûbdur.

Bu bâbda $\sqrt{27} + \sqrt{24} = \sqrt{3x9} + \sqrt{3x8} = \sqrt{3}\,(3 + \sqrt{8}\,)$

$\therefore\ \sqrt{\sqrt{27} + \sqrt{24}} = \sqrt[4]{3}\,\sqrt{3 + \sqrt{8}}$

Bâlâda beyan olunan tarîk bu mahale tatbik olunarak $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$ istihrâc birle $1 + \sqrt{2}$ (yahud madde 88 misâl 1) bu takdirce cezr-i matlûb $\sqrt[4]{3}\,(1 + \sqrt{2})$ yahud $\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{12}$ olup matlûb hâsıl olur.

3.2.28. ❁ Emsâl gayri mahdûda beyanındadır. ❁

(162) Eğer $b + c\,x + d\,x^2 + \text{lh} = b^{/} + c^{/}\,x + d^{/}\,x^2 + \text{lh}$ bir muâdele-i müteşabihe olsa yani tarafeynde bulunan x mechûlünün her bir kıymeti için muâdele-i merkûma sahîh olsa mechûl-ü mezkûrun müsâvî kuvvetlerinin emsalleri dahi birbirine müsâvî olur. Yani $b = b^{/}$ ve $c = c^{/}$ ve $d = d^{/}$ ve hakeza olurlar. Zirâ muâdele-i mezkûre x mechûlünün her bir kıymeti için işbu

$b + c\,x + d\,x^2 + \text{lh} = b^{/} + c^{/}\,x + d^{/}\,x^2 + \text{lh}$ muâdelesi sahîh olmağın $x = 0$ farz olundukta $b = b^{/}$ olduğu malum olup muâdele-i mezbura tarafeyninden işbu b ve $b^{/}$ müsâvîleri terk olunup ve tarafeyn-i merkûmeyn x üzerine taksîm olundukta $c + d\,x + \text{lh} = c^{/} + d$

$^{/}$ x + lh olup işbu muâdele ke'l-evvel x mechûlünün her bir kıymeti için sahîh olduğundan kemâ fi's-sâbık $x = 0$ farz olundukta $c = c^{/}$ ve keza işbu muâdelenin tarafeyninden c ve $c^{/}$ müsâvîleri tarh olunarak tarafeyn-i muâdele x üzerine taksîm olunmakla $d + e\,x$ + lh = $d^{/} + e^{/}\,x$ + lh olarak ve yine $x = 0$ farz olundukta $d = d^{/}$ olduğu dahi malum olup bu vechle muâdelenin bir tarafında bulunan hudûd-u bâkîyenin emsalleri taraf-ı aharinde bulunan hudûd-u bâkîyenin emsallerine müsâvî olduğu ispat olunup matlûb sabit olur. İşbu avânın keyfiyet-i tatbiki zîrde mevzuʿ emsileden nümâyân olur.

Misâl işbu $b - c\,x \,/\, b + d\,x$ kesrin dört haric-i kısmetinin istihrâcı matlûbdur. Bade işbu $b^{/}$ ve $c^{/}$ ve $d^{/}$ ve $e^{/}$ emsalleri tayin olunmak üzere

$b - c\,x \,/\, b + d\,x = b^{/} + c^{/}\,x + d^{/}\,x^{2} + e^{/}\,x^{3} + \ldots\ldots\ldots$ farz olundukta

$b - c\,x = b^{/}b + c^{/}\,b\,x + d^{/}\,b\,x^{2} + e^{/}\,b\,x^{3} + \ldots\ldots + b^{/}\,d\,x + c^{/}\,d\,x^{2} + d^{/}\,d\,x^{3} + \ldots.$

$= b^{/}\,b + (\,c^{/}\,b + b^{/}\,d\,)\,x + (\,d^{/}\,b + c^{/}\,d\,)\,x^{2} + (\,e^{/}\,b + d^{/}\,d\,)\,x^{3} + \ldots\ldots$

x mechûlünün müsâvî kuvvetlerinin emsalleri tesviye kılındıkta

$b^{/}\,b = b$ yahud $b^{/} = 1$

$c^{/}\,b + b^{/}\,d = -\,c \qquad \therefore\; c^{/}\,b = -\,(c + d)$ yahud $c^{/} = -\,(c + d) / \,b$

$d^{/}\,b + b^{/}\,d = 0 \qquad \therefore\; d^{/}\,b = (c + d) / \,b\,d$ yahud $d^{/} = (c + d) / \,b^{2}\,d$

$e^{/}\,b + d^{/}\,d = 0 \qquad \therefore\; e^{/}\,b = -\,(c + d) \,/\, b^{2}\,d^{2}$ yahud $e^{/} = (c + d) / \,b^{3}\,d^{3}$

bu takdirce $b - c\,x \,/\, b + d\,x = 1 - (c + d) / \,b\,x + (c + d) / \,b^{2}\,d\,x^{2} - (c + d) / \,b^{3}\,d^{3}\,x^{3} +$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ olur.

Misâl 2 işbu $\dfrac{1}{(x+b)\,(x+c)\,(x+d)}$ kesrin küsur-u selase-i ahiriye hali matlûbdur.

$\dfrac{1}{(x+b)(x+c)(x+d)} = \dfrac{b\,\prime}{x+b} + \dfrac{c\,\prime}{x+c} + \dfrac{d\,\prime}{x+d}$ farz olunup tarafeyn mahrecinden tahlis olundukta

$1 = b^{/}\,(x + c)\,(x + d) + c^{/}\,(x + b)\,(x + d) + d^{/}\,(x + b)\,(x + c)$ olup işbu muâdele x mechûlünün her bir kıymeti için sahîh olduğu akdemce ispat olunan davanın zâhir olmağın $x = -\,b$ farz olunarak

$1 = b^{/}\,(b - c \,.\, b - d)$ yahud $b^{/} = 1 / \,(b - c)\,(b - d)$

$x = -\,c$ farz olunarak

$1 = -\,c^{/}\,(b - c \,.\, c - d)$ yahud $c^{/} = -1 / \,(b - c)\,(c - d)$

$x = -\,d$ farz olunarak

$1 = d^{/}\,(b - d \,.\, c - d)$ yahud $\mathrm{d}^{/} = 1 / \,(b - d)\,(c - d)$

bu sûretde $\frac{1}{(x+b)\,(x+c)\,(x+d)}$

$$= \frac{1}{(b-c)(b-d)(x+b)} - \frac{1}{(b-c)\,(c-d\,)(x+c)} + \frac{1}{(b-d)\,(c-d)(x+d)}$$

İşte bu vechle kesr-i mezkûr küsur-ü selase-i ahiriye hal ve ifraz olunmuş olur.

Misâl 3 $y^3 - 3\,y + x = 0$ olarak x kemmiyetinin kuvvey-i mütezâyidelerini hâvî bir silsile vasıtasıyla y kemmiyetinin kıymetini istihrâc etmek matlûbdur.

Faraza $y = b\,x + c\,x^3 + d\,x^5 + e\,x^7 +$ lh ………… = 0

Baʿde $y^3 = b^3\,x^3 + 3\,b^2\,c\,x^5 + 3\,b^2\,d\,x^7 +$ lh ……= 0

$-3\,y = -3\,b\,x - 3\,c\,x^3 - 3\,d\,x^5 - 3\,e\,x^7 -$ lh ….. $x = x$ …. = 0

olup x mechûlünün her bir kuvvetinin emsali sıfıra muâdele kılındıkta (madde 162 netice)

$-3\,b + 1 = 0$ yahud $b = 1/3$

$b^3 - 3\,c = 0$ yahud $c = b^3 / 3 = 1/3^4$

$2\,b^2\,c - 3\,d = 0$ yahud $d = b^2\,c = 1/3^6$ lh

$\therefore\ y = x/3 + x^3/3^4 + x^5/3^6 +$ lh silsile-i matlûba hâsıl olur.

3.2.29. ❁ Silsile-i mütevâliye beyanındadır. ❁

(163) b/c kesrini küsur-i mütevâliye üzere işʿâr etmek murâd olunsa c kemmiyeti b kemmiyetinde q kere mevcut olduğu halde d kemmiyeti baki kaldığı farz olunup ve yine d kemmiyeti c kemmiyetinde k kere mevcut olduğu halde e kemmiyeti baki kaldığı farz ve hakeza bu vechle farz olunarak hâdis olan işbu

$b = q\,c + d$

$c = k\,d + e$

$d = r\,e + v$ lh yahud $b/c = q + d/c = q + \frac{d}{k\,d + e}$

$$= q + \frac{1}{k + e/d} = q + \frac{1}{k + \frac{e}{r\,e + v}} = q + \frac{1}{k + \frac{1}{r + \frac{v}{e}}}$$

yani $b/c = q + \frac{1}{k + \frac{1}{r + \frac{1}{x + lh}}}$

Netice 1: Herhangi bir kesrin sûretiyle mahreci azam olsa kesr-i mezkûrun kıymetine bu vechle takrib olunabilib bâlâda beyan olunan taksîm ameline ziyade devam olundukça kesr-i mezkûrun kıymeti sahîhesine gayet takrib olunur.

Netice 2: Bâlâda istihrâc olunan küsur-i mütekarribenin kıymetleri iʿtâ olunan kesrin kıymeti sahîhesinden ʿale'l-tevâli azam ve asgar olur. Nitekim q kemmiyeti b / c kesrinden asgar ve q + 1/ k kemmiyet-i sahîh mea'l-kesrinden azam olup $k + 1/r$ kemmiyeti ise mahreç için ziyade azam olmağın $q + \frac{1}{k + 1/r}$ kesri b / c kesrinden asgar olmuş olur.

(Tarife) q /1 ve q + 1/ k ve $q + \frac{1}{k + 1/r}$ kemmiyetlerinden her biri kesr-i mahrecde ircâʿ olundukta kesr-i mezkûre b / c kesrinin küsur-ü mütebâyinesi tesmiye olunur.

Misâl 1: 314159 / 100000 kesrine akreb müsâvî olan bir kesrin muhtasar ahirin istihrâcı murâd olunsa tarîkı bu vechledir.

100000,314159 (3

300000

14159,100000 (7

99113

887,14159 (15

877

5289

4435

---

854 887 (1

854

---

33 lh

Bu sûretde $q = 3$ $k = 7$ $r = 15$ $x = 1$ lh olmağın

$314159 = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15+lh}}$ olup birinci takrib 3 olarak kesr-i mezkûrun kıymet-i sahîhesinden ziyade ekal ve ikincisi 3 + 1/7 = 22/7 ziyade ekser ve üçüncüsü 3 + $\frac{1}{7+\frac{1}{15}}$ = 3+ 15/106 = 333/106 ziyade ekal ve hakeza böylece olarak işbu kesr-i kutru vahid olan bir dairenin muhîtiyle kutru beynindeki nisbeti ifade etmeğin bu takdirce muhît 3 kutrdan azam ve 22/7 kutrundan asgar 333/106 kutrundan azam ve hakeza olur.

Misâl 2: 84/227 kesrine müntehâ olan küsümet silsilenin istihrâcı matlûb olsa

84/227 = $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\frac{1}{2}}}}}}}$ olup haric-i kısmetler 2 ve 1 ve 2 ve 2 ve 1 ve 3 ve 2 olduğundan küsur-i matlûba $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{3}$ ve $\frac{3}{7}$ ve $\frac{7}{19}$ ve $\frac{10}{27}$ ve $\frac{37}{100}$ ve $\frac{84}{227}$ olmuş olur.

(164) $\sqrt{b^2+1}$ cezrini kesr-i mütevâliye sûretinde işʿâr etmek murâd olunsa

$\sqrt{b^2+1} = b + \sqrt{b^2+1} - b$

$= b\ /\ \sqrt{b^2+1} + b$

$= b + 1\ /\ b + b + \sqrt{b^2+1} - b$

$= b + \cfrac{1}{2\,b + \cfrac{1}{2\,\mathrm{b} + \cfrac{1}{2\,\mathrm{b} + \cdots \ldots}}}$

Misâl 3 $\sqrt{17} = \sqrt{4^2+1}$

$= 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cdots \ldots}}}$

küsur-i mütenâhiye $\frac{4}{1}$ ve $4+\frac{1}{8}$ ve 4 ve $\frac{1}{8+\frac{1}{8}}$ lh yahud $\frac{4}{1}$ ve $\frac{33}{8}$ ve $\frac{264}{65}$ lh olup işbu küsurden her biri $\sqrt{17}$ kıymet-i sahîhine ânı veli eden küsurden dahi karîb olur.

(165) $\sqrt{11}$ cezrini küsur-i mütevâliye üzere ifade edip ve küsur-i mezkûreyi istihrâc etmek murâd olunsa

$\sqrt{11} = 3 + \sqrt{11} - 3 = 3 + 2\ /\ \sqrt{11} + 3 = 3 + \cfrac{1}{\frac{\sqrt{11}+3}{2}}$

$(\sqrt{11} + 3)\ /\ 2 = 3 + (\sqrt{11} - 3)\ /2 = 3 + 2\ /\ 2\ (\sqrt{11} + 3) = 3 + 1\ /\ (3 + \sqrt{11}\ )$

$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\sqrt{11}}} = 3 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+3+\cfrac{1}{3+lh}}}}} = 3 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+lh}}}}}$

Haric-i kısmetler 3 ve 3 ve 6 ve 3 ve 6 ve lh ve küsur $\frac{3}{1}$ ve $\frac{10}{3}$ ve $\frac{63}{19}$ ve $\frac{193}{60}$ ve $\frac{1257}{379}$ ve lh olur.

3.2.30. ꕥ Logaritmalar beyanındadır. ꕥ

(166) Eğer $n = b^{x}$ olsa işbu muâdelede bulunan x kemmiyeti n kemmiyetinin b kaidesine göre logaritması tesmiye olunur. Yahud iʿtâ olunan bir kaideye göre bir adedin logaritması kaidenin şol bir kuvvetidir ki kaide işbu kuvvete rafiʿ olundukta adet-i mezkûre müsâvî ola ve eğer bir logaritma düstürü ʿale'l-ʿumûm kaidenin her bir kıymeti için sahîh olsa düstür-u mezkûrede bulunan logaritmalar bu vechle la m la n tahrir olunur. Lakin eğer düstür-u merkûmede bulunan logaritmalar yalnız kaidenin bir kıymet-i mahsûsası için sahîh olmuş olsa farazâ $b = 10$ gibi. Bu sûretde $la_{10}\ m$ $la_{10}\ n$ yahud bu vechle $\log_{10} m$ $\log_{10} n$ tahrir olunur. Ve eğer $n = b^{x}$ muâdelesinde b kemmiyeti ala hâlihi kalarak n kemmiyetine muhtelif kıymetler takdir olunarak x kemmiyetinin dahi mükabil kıymetleri bir mahale derç olunsa bu vechle teşkil olunan cetvele b kaidesine nazaran logaritma cetvelleri tabir olunur. Ve kaidenin 10 olduğuna göre hesap olunan logaritmalarda kavaid-i mahsûsa olup ve adet-i logaritma cetvelleri dahi bu kaideye nazaran hesap olunmuş olduğu zîrde vazʿ olunacak mevâddeden zâhir olsa gerektir.

(167) Çünkü eğer $n = b^{x}$ olsa $x = \log b\ n$ olmağın bu takdirce $n = b^{x} = b^{\log n}$ olmuş olur.

Netice 1 eğer $x = 1$ olsa $n = b$ olmağın bu sûretde $\log_{b} b = 1$ olup ve eğer $x = 0$ olsa b^{x} yahud n vahid olarak bu ecelden $\log 1= 0$ olmuş olur.

Netice 2 herhangi bir logaritmanın kaidesi b olsa çünkü

$m = b^{\log_{b} m}$ $n = b^{\log_{b} n}$ $\therefore$ $m^{1/\log_{b} m} = b$ $n^{1/\log_{b} n} = b$

$\therefore$ $m^{1/\log_{b} m} = n^{1/\log_{b} n}$ $m^{\log_{b} n} = n^{\log_{b} m}$

b kemmiyetinin her bir kıymeti için bir hâsıl-ı sahîh olmağın bu ecelden $m^{la\ n} = n^{la\ m}$ m olmuş olur.

(168) İtâ olunan herhangi bir i kaidesine göre hesap olunmuş logaritma cetvellerinden b kaidesine göre logaritma cetvellerinin teşkil-i matlûb olsa akdemki madde ile $n = i^{\log n}$ $n = (10)^{\log_{10} n}$ $10 = i^{\log 10}$ olup bu ecelden $i^{\log n} = (10)^{\log_{10} n} = (i^{\log 10})^{\log_{10} n} = i^{\log 10 \times \log_{10} n}$ olarak i kemmiyetinin üsleri müsâvî kılındıkta

$\log_{i\ n} = \log_{i\ 10 \times 10\ n}$ ve $\log_{10\ n} = (1 / \log_{i\ 10}) \times \log_{i\ n}$

olmağın bu takdirce herhangi bir adedin 10 ve i misillü muhtelif iki kaideye nazaran hesap olunmuş logaritmaları mübeddil tabir olunan işbu $1 / \log_{i\ 10}$ madrûb daimi vasıtasıyla müttehid olunmakla bu sûretde i kaidesine göre hesap olunmuş logaritma cetvellerinden 10 kaidesine nazaran olan logaritma cetvelleri teşkil olunabilir. Kaldı ki, derin davada 10 mahaline b harfi tahrir olundukta $\log_{bn} = (1 / \log_{ib}) \times \log_{in}$ hâdis olup bir adedin kaideleri b ve i olarak iki tarz üzere bulunan logaritmalarını birbiriyle ittihâd için mübeddil $1 / \log_{ib}$ olmuş olur.

(169) Madrûbât-ı müteaddedenin hâsıl-ı darblarının logaritması madrûbât-ı mezkûrenin logaritmaları mecmûʿna müsâvîdir.

Zirâ $m \times n \times r \ldots\ldots = b^{\log_{b} m} \times b^{\log_{b} n} \times b^{\log_{b} r} \ldots\ldots = b^{(\log_{b} m + \log_{b} n + \log_{b} r \ldots)}$

lakin $m \times n \times r \ldots\ldots = b^{\log b\,(m \times n \times r \ldots)}$ olduğundan

$\log_{b} (m \times n \times r \ldots) = \log_{b} m + \log_{b} n + \log_{b} r \ldots\ldots$

yahud $(m \times n \times r \ldots\ldots) = \text{la}\, m + \text{la}\, n + \text{la}\, r + \ldots\ldots$

bu takdirce logaritma cetvellerinde işbu madrûbların logaritmaları mecmûʿna müsâvî bulunan logaritmanın adedi madrûbât-ı mezkûrenin hâsıl-ı darbı olmuş olur.

(170) Haric-i kısmetin logaritması maksûmun logaritması ile maksûm-u aleyhin logaritması beynindeki tefaddale müsâvîdir.

Zirâ $b^{\log_{b} (m / n)} = m / n = b^{\log_{b} m} / b^{\log_{b} n} = b^{\log_{b} m - \log_{b} n}$

$\therefore\ \log_{b} (m / n) = \log_{b} m - \log_{b} n$ yahud $\text{la}\, (m / n) = \text{la}\, m - \text{la}\, n$

Bu takdirce eğer logaritma cetvellerinde maksûm ile maksûm-u aleyhin logaritmaları beynindeki tefaddale müsâvî bulunan logaritmanın adedi haric-i kısmet-i mezkûre müsâvî olmuş olur.

(171) Herhangi bir adedin q kuvvete rafʿinin logaritması ol adedin logaritmasının q misline müsâvîdir. Gerek q adet-i sahîh olsun ve gerek kesîr olsun

Zirâ $b^{\log_{b} (m)^{q}} = m^{q} = (b^{\log_{b} m})^{q} = b^{q \log_{b} m}$

$\therefore\ \log_{b} (m^{q}) = q \log_{b} m$ yahud $\text{la}\, (m^{q}) = q\, \text{la}\, m$

Ve keza $b^{\log_{b} (m)^{1/q}} = m^{1/q} = (b^{\log_{b} m})1/\ q = b^{1/q \log_{b} m}$

$\therefore\ \log_{b} (m^{1/q}) = 1/\,q \log_{b} m$ yahud $\text{la}\, (m^{1/q}) = 1/\,q\, \text{la}\, m$

bundan zâhir olduğu iʿtâ olunan herhangi bir adedin q kuvveti logaritma cetvellerinde şol bir adetdir ki logaritması iʿtâ olunan adedin logaritmasının q misli olur. Ve yine adedi mezkûrün q kuvvetinden cezri logaritma cetvellerinde şol bir adetdir ki logaritması iʿtâ olunan adedin logaritmasının $1/\,q$ misli ola.

Netice bâlâda muharrer mevâd-ı selaseden zâhir olduğu darb ve taksîm ve terfiʿ ve teczîr amellerinin hususan adad-ı kesîre hakkında logaritma cetvelleri vasıtasıyla keyfiyet-i icrâları âdî ilm-i hesap kavaidinden dahi eshel olup fakat ziyadesiyle âsân olan cemʿ ve tarh amellerinin logaritma cetvelleri vasıtasıyla icrâları mümkün olmayarak ilm-i hesap ameliyatına muhtaç olunur.

(172) Âdî yahud beriker nâm musannefin usûlünce hesap olunmuş logaritmalarda yani kaidesi 10 olan logaritmalarda n adedinin logaritması malum olsa işbu logaritmadan $10^{m} \times n$ ve $n / 10^{m}$ adetlerinin logaritmaları tayin olunabilir.

Zirâ $\log_{10} (10^{m} \times n) = \log_{10} 10^{m} + \log_{10} n$ (madde 169)

$= m \log_{10} 10 + \log_{10} n$ (madde 171)

$= m + \log_{10} n$ (madde 167 netice 1)

ve $\log_{10} (n / 10^{m}) = \log_{10} n - \log_{10} 10^{m} = \log_{10} n - m$

Şöyle ki, logaritma cetvellerinden ahz olunarak

$\log_{10} 6 = 0{,}7781513$

$\therefore \log_{10} 60 = \log_{10} 10 + \log_{10} 6 = 1 + 0{,}7781513 = 1{,}7781513$

$\log_{10} 600 = \log_{10} (10)^2 + \log_{10} 6 = 2 + 0{,}7781513 = 2{,}7781513$

$\log_{10} 0{,}6 = \log_{10} 6 - \log_{10} 10 = 0{,}7781513 - 1$

$\log_{10} 0{,}006 = \log_{10} 6 - \log_{10} (10)^3 = 0{,}7781513 - 3$

bâlâda muharrer logaritmaların aharını ikisi bu vechle

1,7781513 ve 3,7781513 tahrir olunur.

Mütearife

Bir adedin logaritmasının adet-i sahîh olan kısmına ol adedin logaritmasının meşʿarı yahud merfûʿı tesmiye olunup ve kesîrden ibaret olan kısmına ol adedin logaritmasının kesri tabir olunur.

Nitekim $\log_{10} 600 = 2{,}7781513$ logaritmasında 2 adete 600 adedin logaritmasının meşʿarı yahud merfûʿı tesmiye olunup 0,7781513 kesrine dahi 6 adedin logaritmasının kesri ıtlâk olunur.

(173) Âdî logaritmada iʿtâ olunan herhangi bir adedin logaritmasının merfûʿını tayin etmenin tarîkıdır. Eğer bir adet 1 ile 10 beyninde olsa logaritması 0 ile 1 beyninde olup merfûʿı 0 olur.

Ve keza 10 ile 100 __________1 ile 2 __________1 olur.

Kezalike 100 ile 1000 _________ 2 ile 3 __________ 2 olur.

Ve yine 10^{n-1} ile 10^{n} __________ $n-1$ ile n __________ $n-1$ olur.

Bu ecelden 10^{n-1} ile 10^{n} adetlerin beyninde vâkıʿ olan adet yani n adet hane rakamdan ibaret olan adedin logaritmasının merfûʿı $n-1$ yahud adet-i mezkûrun hâvî olduğu adet hane-i rakamdan vâhid nâkıs olmuş olur. Ve eğer adet-i mezkûr 1 ile 1/10 beyninde olsa logaritması 0 ile –1 beyninde olup merfûʿı 1^{-} olur.

Ve keza 1/10 ile 1/100 __________ –1 ile –2 __________ 2^{-} olur.

Kezalike $1/10^{n-1}$ ile $1/10^{n}$ __________ – (n –1) ile – n _________ n^{-} olur.

Bu takdirce işarat-ı mefrûzeden sonra n –1 adet sıfırı havi olan bir kesr-i eaşâʿrının logaritmasının merfûʿı n olur. Bu sûretde umûmen herhangi bir adedin logaritmasının merfûʿı ol adetde bulunan adet-i hane-i rakamdan bir nakıs olup eğer adet-i mezkûr bir kesr-i eaşâʿrı ise logaritmasının merfûʿı alamet-i mefrûzayı veli eden adet sıfıra müsâvî olarak fakat işaratı menfî olmuş olur.

Ve bilakis iʿtâ olunan bir takım logaritmaların merfûʿıları

1 ve 2 ve 3 ……. 1^{-} ve 2^{-} ve 3^{-} olmuş olsa işbu logaritmaların adet-i sahîh olan kısımları 2 ve 3 ve 4 ………….. ve 0 ve –1 ve –2 ….. hane-i rakamlardan ibaret olmuş olurlar. Şöyle ki, 254 ile 25400 adetlerin logaritmalarının merfûʿıları 2 ile 4 olup 2,54 ve 25,4 ve 254 …….. 0, adetlerin logaritmalarının merfûʿıları 0 ve 1 ve 4^{-} olur. Nitekim logaritma cetvellerinde 3652 adedin logaritmasının kesri 0,5625308 olmağın

$\therefore \quad \log_{10} 3652 = 3{,}5625308$

$\log_{10} 36{,}52 = 1{,}5625308$

$\log_{10} 365200 = 5{,}5625308$

$\log_{10} 0{,}3652 = 1^{-}{,}5625308$

$\log_{10} 0{,}003652 = 3^{-}{,}5625308$

(174) Beriker nâm musannifin tarzı üzere hesap olunmuş olan logaritmalarının fevâid-i mahsûsaları beyanındadır. Şöyle ki, akdemki maddeden zâhir olduğu üzere eğer bir logaritmanın kaidesi 10 olsa logaritma cetvellerine adâd-ı mezkûre logaritmalarının yalnız kesîrleri derci lazım gelip logaritması matlûb olan adedin rakamının hanesinin adedi taadud olunarak merfûʿı tayin olunabilir. İşte bu vechle merfûʿın terki âdî logaritma cetvellerinin kavaid-i sâire üzerine hesap olunmuş cetvellerden daha cesametsizce olmasına bâis olur. Ve keza (madde 172) zâhir olduğu üzere bu tarz logaritmalarda n adedin logaritmasının kesri m herhangi bir adet-i sahîh olduğu üzere $(10)^{n}$ x n ve $n / 10^{m}$ adetlerin logaritmalarının kesîrleri olur ve bu keyfiyet âdî cetvelleri kavaid-i sâireye hesap olunmuş cetvelden daha muhtasar kılar. Zirâ sâire-i kaideye göre hesap olunmuş cetvelde n adedin logaritmasının kesri $10^{m}\, n$ ve $n / 10^{m}$ adetlerin logaritmaları kesîrlerinin aynı olamaz.

(175) Ânifen ispat olunan (169) ve (170) ve (171) maddeler zîrde irâd olunacak emsile vasıtasıyla izah olunsalar gerektir.

Emsile

Birinci misâl 23 adedin 16 adet ile darbı matlûbdur. Logaritma cetvellerinden

23 adedin logaritmasının kesri 0,3617278

16 adedin logaritmasının kesri 0,2041200

$\therefore$ $\log_{10} 23 = 1,3617278$

$\log_{10} 16 = 1,2041200$ / 2,5657478

Ve yine logaritma cetvellerinden 0,5658478 logaritma kesrinin adedi 368 olmağın

$\therefore$ $\log_{10} 3680$ yahud $\log_{10} 368 = 3,5658478$ olup ve 368 hâsıl-ı darb matlûb olmuş olur.

İkinci misâl 0,0172 adet ile 0,00241 adedin darbı matlûbdur.

$\log_{10} 0,0172 = 2^{-},2355284$

$\log_{10} 0,00241 = 3^{-},3304138$ / $5^{-},5659422 = l_{10}\ 0,000036808$

Üçüncü misâl 3672 adedin 51000 adet üzerine taksîmi matlûbdur.

$\log_{10} 3672 = 3,5649027$

$\log_{10} 51000 = 4,7075702$ / $2^{-},8573325$ işbu istihrâc olunan logaritma kesri 72 adedin logaritması kesrine mutabık olduğundan

$\therefore$ $2^{-},8573325 = \log_{10} 0,072$ olup 0,072 adet haric-i kısmet marlub olur.

Dördüncü misâl $(15,4)^3$ ve $(650)^{1/5}$ adetlerinin kıymetlerinin istihrâcı matlûbdur.

$\log_{10} 15,4 = 1,1875207$

3 / $3,5625621 = \log_{10} 3552,3$ takriben

$\therefore$ 3552,3 adet 15,4 adedin mikab takribesi olmuş olur.

Ve yine 650 = 2,8139134

$\therefore$ $1/5\ \log_{10} 650 = 0,5625826 = \log_{10} 3,6524$ takriben

$\therefore$ 3,6524 adet 650 adedin beşinci kuvvetden cezri takribesi olur.

Beşinci misâl $(0,085)^4$ ve $(0,000065)^{1/3}$ adetlerin kıymetlerini istihrâc etmek matlûbdur.

$2^{-},9294189 = \log_{10} 0,085$

4 / $5^{-},7176756$ işbu logaritma kesri 522006 adedin logaritma kesrinin akreb-i müsâvîsi olduğundan adet-i matlûbun bir bahisi takriben

0,0000522006 olmuş olur.

Ve yine $\log_{10} 0{,}000065 = \bar{5},8129134$

$= 1{,}8129134 + \bar{6}$

$\therefore$ $\bar{5},8129134 / \bar{2},6043044 = \log_{10} 0{,}040207$ takriben olmuş olur.

3.2.31. ✽ Logaritma cetvellerinin tarîkı inşası beyanındadır. ✽

(176) x kemmiyetinin kuvvey-i mütezâyideleri vasıtasıyla $\log_b (1+x)$ logaritmasının tevsiʿı matlûb olsa $b^{/} = 1$ yahud $\log_b 1 = 0$ olduğundan $\log_b (1+x)$ logaritmasında x mahv oldukta $\log_b (1+x) = \log_b 1$ olmağın bu takdirce $\log_b (1+x)$ logaritmasının kıymetini ifade eden silsile x mechûlünün menfî kuvvetlerini havi olamaz. Çünkü x mahv oldukta silsile na mütenahi olur. Ve silsile-i mezkûrede gayri muhavvel had dahi bulunamaz. Zirâ hadd-ı mezkûr x kemmiyetiyle beraber muhavvel olmamak lazım gelir. Bu ecelden

$m\ x + c\ x^2 + d\, x^3 + \ldots\ldots = \log_b (1+x)$ farz olunsa işbu silsilenin tarafınında x mahaline $x + e$ tahrir olundukta

$m\,(x+e) + c\,(x+e)^2 + d\,(x+e)^3 + \ldots\ldots\ \log_b (1+x+e)$ olup silsile-i evveli silsile-i sâniyeden tarh olundukta

$m\,\{(x+e) - x\} + c\,\{(x+e)^2 - x^2\} + d\,\{(x+e)^3 - x^3\} + \ldots\ldots$ yahud

$m\,e + c\,(2\,x\,e + e^2) + d\,(3\,x^3\,e + 3\,x\,e^2 + e^3) + \ldots = \log_b (1+x+e) - \log_b (1+x)$

$= \log_b (1+x+e/(1+x)$ olduğundan (madde 170) ile

$= \log_b (1+ e/x+1) = m\,(e/x+1) + c\,(e/x+1)^2 + e\,(e/x+1)^3 + \ldots\ldots$

İbtida ki farzımızdan lazım gelip işbu muâdelenin tarafeyni e ile taksîm birle

$m + c\,(2\,x + e) + d\,(3\,x^3 + 3\,x\,e + e^2) + \ldots = m/x+1) + c\,(e/x+1)^2 + \ldots$ olur.

$e = 0$ farz olundukta $m + 2\,c\,x + 3\,d\,x^2 + \ldots\ldots = m/x+1$

$= m\,(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)$ x kemmiyetinin müsâvî kuvvetlerinin emsalleri müsâvî kılındıkta

$2\,c = -m \quad 3\,d = m \quad 4\,e = -m$ lh

$\therefore\ c = -m/2 \quad d = m/3 \quad e = -m/4$ lh

$\therefore\ \log_b (1+x) = (x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - \ldots)$

logaritma düstûru hâsıl olur.

Netice 1 çünkü bâlâda muharrer m kemmiyeti gayri muhavvel olduğundan b kemmiyetinin kıymetine tabi olmakla i şol bir kemmiyet farz oluna ki $i^{1/m} = b$ ola

$\therefore$ $1/m = \log_i b$ ve $\log_i (1+x) = 1/\log_i b\,(x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - \ldots)$ (2) olup kaide-i logaritma i farz olundukta

$\log_i (1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - \ldots$ (3)

İşbu i kemmiyetinin kıymeti gayri muhavvelesi 2,7182818 olarak gelecekte istihrâc olunsa gerektir.

İmdi işbu i kaidesine göre hesap olunmuş logaritmalara nâ pir logaritmaları tesmiye olunması logaritmaların mevcutu olan nâ pir nam müellifin ismiyle mülakkab olup müellif mesfur zikr olunan kaideyi kavaid-i sâireye tercih eylemişdir. Zirâ kaide-i mezkûreye göre logaritmaların hesabı kavaid-i sâireye göre logaritmaların hesaplarından daha eshel olur. Nitekim bu keyfiyet akdemce (2) ve (3) rakamlarıyla ifade olunan silsileteyn birbirleriyle kıyas olunarak zâhir ve aşikâr olur.

Netice 2 $\log_i b = \log_i (1 + (b-1))$ olup bu dahi silsile (3) ile $(b-1) - 1/2\,(b-1)^2 + 1/3\,(b-1)^3 - \ldots\ldots\ldots$ (4)

Netice 3 $m = 1/\log_i b = (b-1) - 1/2\,(b-1)^2 + 1/3\,(b-1)^3 - \ldots\ldots\ldots$

Netice 4 âdî logaritmaların mübeddili olan $1/\log_i 10$ kesrinin kıymeti âtide ispat olunacak (8) rakamıyla ifade olunan düstûr mevcubunca olarak vech-i âti üzere hesap olunur.

Düstûr (8) ile $\log_i 5 = \log_i 4 + 2\left(\frac{1}{8+1} + 1/3\left(\frac{1}{(8+1)}\right)^3 + 1/5\left(\frac{1}{(8+1)}\right)^5 + \ldots\right)$

$= 2\log_i 2 + 2\,(1/9 + 1/3\;1/9^2 + 1/5\;1/9^5 + \ldots\ldots\ldots)$

$\therefore$ $\log_i 10 = \log_i 2 + \log_i 5 = 3\log_i 2 + 2\,(1/9 + 1/3\;1/9^3 + 1/5\;1/9^5 + \ldots\ldots)$

$= 6\,(1/3 + 1/3\;1/3^2 + 1/5\;1/3^5 + \ldots\ldots\ldots)$ düstûr (8) ile

$+2\,(1/9 + 1/3\;1/9^3 + 1/5\;1/9^5 + \ldots\ldots\ldots)$

$\log_i 10 = 2\,(1 + 1/3\;1/9 + 1/5\;1/9^3 + \ldots\ldots + 1/9 + 1/3\;1/9^3 + 1/5\;1/9^5 + \ldots\ldots\ldots)$

$= 2{,}30257509\ldots$

Bu ecelden $1/\log_i 10 = 0{,}434294819$ olup mübeddil tabir olunan kesrin kıymeti bu vechle istihrâc olunmuş olur.

(177) Logaritmaların hesabı için bazı düstûrat seriu'l-mütekaribe istihrâc etmek murâd olunsa düstûr (3) ile

$= \log_i 1/x = \log_i (1 - x - 1/x) = -x - 1/x - 1/2\,(x - 1/x)\ldots\ldots$

Lakin $\log_i 1/x = \log_i 1 - \log_i x = -\log_i x$

$\therefore$ $\log_i x = (x - 1/x) + 1/2\,(x - 1/x)^2 + \ldots\ldots\ldots$ (5)

Ve yine $\log_i (1 + z) = z - z^2/2 + z^3/3 - \dots\dots\dots$

$\log_i (1 - z) = - z - z^2/2 - z^3/3 - \dots\dots\dots$

$\therefore \ \log_i (1 + z) - \log_i (1 - z)$ yahud $\log_i (1 + z) / (1 - z)$

$= 2 (z + z^3/3 + z^5/5 + \dots\dots\dots)$

Ve eğer $(1 + z) / (1 - z) = x$ olsa bu takdirce $z = (x -1/ x +1)$ olmağın düstûrda mahaline vazʿ olundukta

$\log_i x = 2 ((x -1/ x +1) + 1/3 (x -1/ x +1)^3 + 1/5 (x -1/ x +1)^5 + \dots\dots)$ (6)

Eğer işbu silsilede x vahiddden cüz'ü azam olsa silsile-i mezkûre serian mütekarib olur.

(178) z kemmiyeti x kemmiyetine nazaran asgar olarak iʿtâ olunan $\log_i x$ logaritmasından $\log_i (x + z)$ logaritmasının istihrâcı matlûbdur.

$\log_i (x + z) = \log_i (x (1+ z / x)) = \log_i x + \log_i (1+ z / x)$ olup

$(1+ z / x) - 1 / (1+ z / x) + 1 = z /2 x + z$ olduğundan düstûr (6) ile $\log_i (1+ z / x)$ logaritması tevsi birle

$\log_i (x + z) = \log_i x + 2 ((z /2 x + z) + 1/3 (z /2 x + z)^3 + \dots\dots) \dots$ (7) olup düstûr-u matlûb hâsıl olmuş olur.

Netice eğer $z = 1$ olsa

$\log_i (1 + x) = \log_i x + (1/ 2 x + 1) + 1/3 (1/ 2 x + 1)^3 + \dots) \dots.$ (8) silsilesi hâdis olup x kemmiyeti azam olduğu halde $\log_i x$ logaritmasından $\log_i (1 + x)$ logaritmasının hesabına elzem bir düstûr umûmi olmuş olur.

(179) x ve $x - 1$ adeteyn mütevâliyenin iʿtâ olunan nâ pir logaritmalarından adeteyn-i mezkûrunu veli eden adedin logaritmasının istihrâcı matlûbdur.

$\log_i (x + 1) = \log_i (x^2 - 1) / (x - 1) = \log_i (x^2 (1- 1/ x^2) / (x - 1)$

$= 2 \log_i x - \log_i (x - 1) + \log_i (1- 1/ x^2)$ olup $\log_i (1 - 1/ x^2)$ logaritması düstûr (6) ile tevsiʿ birle çünkü

$(1- 1/ x^2) - 1/ (1+ 1/ x^2) + 1$ olduğundan

$\log_i (x + 1) = 2 \log_i x - \log_i (x - 1) - 2 (1/ (2 x^2 - 1) + 1/2 (2 x^2 - 1) + \dots) \dots$(9) olarak düstûr-u matlûb olmuş olur.

3.2.32. ❁ Âdî logaritma cetvellerinin târîkı iʿmâli beyanındadır. ❁

(180) Akdemce tahsîl olunarak (5) ve (6) ve (7) rakamlarıyla ifade olunan selasil vasıtasıyla sagir olan adâd-i asliyenin nâ pir logaritmaları istihrâc olunup bade

asliyeden olmayan adâd-i kebire-i asliyede bulunan madrûblarına hal olunarak işbu madrûbların logaritmalarından adâd-i mezkûrenin logaritmaları istihsâl olunabilir. Şöyle ki, $\log_i 288 = \log_i 2^5 \text{ x } 3^2 = \log_i 2^5 + \log_i 3^2 = 5 \log_i 2 + 2 \log_i 3$ ve (8) ve (9) ifadeleri asliyeden olmayan adâd-i kebirenin logaritmalarının istihrâcını ziyadesiyle teshîl eder.

İşte bu vechle nâ pir logaritmaları istihrâc olunduktan sonra her birilerinin kıymeti 0,34294819 kesri iʿşârı olan $1 / \log_i 10$ kesriyle darb olundukta kaidesi 10 olan cetveller dahi hadüs itmiş olur.

Logaritma cetvellerinde logaritması olmayan adâdın logaritmalarını ve iʿtâ olunan herhangi bir logaritmanın adedini istihrâc etmek beyanındadır.

(181) Faraza altı hane rakamdan ibaret olan herhangi bir adet-i sahîh mea'l-kesr $n + b / 10$ ile ve logaritması kesri m ile işʿâr olunup n ve $n +1$ ifadeleriyle dahi beş hane rakamdan ibaret olan adeteyn-i mütevâliyeyn ve m_1 ve m_2 ile logaritmaları ifade olunarak çünkü n ve $n + b / 10$ adetlerinin sahîh olan kısımları birbirine müsâvî olduğundan logaritmalarının merfûʿıları birbirinin aynı olmağın

$\therefore \quad m - m_1 = \log_{10} (n + b / 10) - \log_{10} n = \log_{10} (n + b / 10) / n$ (madde 170) ile $=$ $\log_{10} (1 + b / n\ 10)$ olup işbu muâdelede bulunan $\log_{10} (1 + b / n\ 10)$ düstûr (2) ile tevsiʿ olunup hadd-ı evvele kıyasen hudûd-u mütevâliye-i bakıye asgar olduklarından terk olundukta hâsıl-ı tevsiʿ takriben $1 / \log_i 10 \ \ b / n\ 10$ olmuş olur.

Ve bu misillü beyan olunur ki

$m_2 - m_1 = \log_{10} (n +1) - \log_{10} n = 1 / \log_i 10 \ .\ 1 / n$

$\therefore \quad m - m_1 = (m_2 - m_1) \ .\ b / 10$

Bu takdirce eğer m_1 ve m_2 ve b kemmiyetleri malum olsa işbu istihrâc olunan düstûrdan m kemmiyeti tahsîl olunabilip yahud m ve m_1 ve m_2 kemmiyetleri malum olsa b kemmiyeti dahi tahdîd olunabilir.

Misâl 1 Logaritması 3,5677766 olan adedi bâlâda istihsâl olunan düstûr-u umûmi vasıtasıyla istihrâc etmek matlûb olsa işbu iʿtâ olunan logaritma kesri cetvelden tahrirle $\log_{10} 36942$ logaritmaya hemen mutabık olmakla iʿtâ olunan logaritma kesri $= m = 0{,}5677766$ mutabık logaritma kesri $= m_1 = 0{,}5677672 / m - m_1 = 94$

Ve keza $\log_{10} 36964 = m_2 = 0{,}5677789$

$\log_{10} 36963 = m_1 = 0{,}5677672$ / $m_2 - m_1 = 117$

İşbu müsâvîler düstûr-u mezkûrede mahallerine ikame birle

$94 = 117 \times b / 10$ muâdelesi hâdis olup işbu muâdeleden b istihrâc olundukta $b = 8$ olmağın 369638 adedi hâsıl olup iʿtâ olunan logaritmanın merfûʿı 3 olduğundan adet-i matlûb dahi 3696,38 olmuş olur.

Misâl 2 adedi 367,654 olan logaritmanın istihrâcı matlûbdur.

Logaritma cetvellerinden $\log_{10} 367650 = 2{,} 5654346$ olup tefaddal dahi 118 olduğundan mukaddem istihrâc olunan düstûrda müsâvîler mahallerine vazʿ birle

$m = m_1 + (m_2 - m_1) \,.\, b / 10 = 2{,} 5654346 + 118 \times 4/10$

$= 2{,} 5654346 + 47 = 2{,} 5654393$ bu takdirce $\log_{10} 367{,}654 = 2{,} 5654393$ olmuş olur.

Fâiz-i müfred ve fâiz-i mürekkeb beyanındadır.

(182) (Taʿrif) Fâiz diye bir kimesne bir aharın malik olduğu meblağın istiʿmali için idâne olunan akçeye denilip meblağ-ı mezkûrdan bir miktarının vakt-i muayene zarfında istiʿmali için verilen akçeye meblağ-ı mezburun fâizi tesmiye olunur. Nitekim bir mecidiyenin bir sene zarfında istiʿmali gibi. Vakta ki re'sü'l-mâlikin faizi yalnız olduğu halde ahz olunur ise bu nevi faize faiz-i müfred tabir olunup eğer faiz-i mezburanın hin husûlünde re'sü'l-mâl zam olunarak işbu mecmûʿn üzerine faiz tahsis olunur ise bu nevi faize dahi faiz-i mürekkeb ıtlâk olunarak gerek faiz-i müfred ve gerek faiz-i mürekkebde herhangi vaktin nihayetinde hâsıl olan faiz ile re'sü'l-mâl mecmûʿna bâliğ olur.

3.2.33. Fâiz-i müfred beyanındadır.

(183) İʿtâ olunan bir miktar akçenin herhangi müddet zarfında faiz-i müfred üzere bâliğinin istihrâcı murâd olunsa mesela re'sü'l-mâl olan adet-i mecidiye q harfiyle ve faizi matlûb olan adedisine n harfiyle ve bir mecidiyenin bir sene zarfında olan faizi r harfiyle işʿâr olunup m harfiyle dahi istihrâcı murâd olunan bâliğ ifade olunsa çünkü iʿtâ olunan herhangi bir mecmûʿn bir tarz-ı muayende olan faizi müddetiyle mütenâsib olmağın 1 (sene) : n (sene) : : r : $n\,r$ olup işbu $n\,r$ miktarı bir mecidiyenin n sene hitâmında faizi bir mecidiyenin faizinin q misli olduğundan $q\,n\,r$ olarak bu sûretde bâliğ matlûb yani $m = q + q\,n\,r$ olmuş olur.

(184) İşbu derece-i evveli muâdelesinde bulunan q ve n ve r ve m kemmiyât-ı erbaʿanın herhangi üçü malum olsa dördüncü istihrâc olunabilir. Şöyle ki,

$q = m / 1 + n r \quad n = m - q / q r \quad r = m - q / q n$

Misâl ne miktar akçe idâne oluna ki yüzde beş faiz ile dokuz mah hitâmında 600 mecidiyeye bâliğ ola yani ne miktar re'sü'l-mâl senevî yüzde beş faiz ile dokuz mah hitâmında 600 mecidiyeye bâliğ olur.

Bu babda $m = 600$ $n = 3/4 = 0{,}75$ $r = 5/100 = 0{,}05$ olup bu sûretde

$q = m / 1 + n r = 600 / 1 + 0{,}75 \times 0{,}05$

578,313 mecidiyeye = 578 mecidiye 31 kuruş 12 para olup matlûb hâsıl olur.

3.2.34. ❁ Fâiz-i mürekkeb beyanındadır. ❁

(185) İʿtâ olunan bir miktar akçenin herhangi müddet zarfında faiz-i mürekkeb üzere bâliğinin istihrâcı murâd olunsa r = bir mecidiye ile bir mecidiyenin bir sene müddetinde olan faizine müsâvî farz olundukta r bir senenin hitâmında re'sü'l-mâl olmağın ikinci sene hitâmında bâliğ = r mecidiyenin bir sene hitâmında bâliğ $= r \times r = r^2$ üçüncü sene hitâmında bâliğ $= r^2$ mecidiyenin bir sene hitâmında bâliğ $= r^2 \times r = r^3$ ve hakeza olup r^n bir mecidiyenin n sene hitâmında bâliğ olmuş olur. Bu takdirce eğer re'sü'l-mâl q mecidiye olmuş olsa işbu q mecidiyenin bâliği bir mecidiyenin bâliğinin q misli olduğundan $m = q r^n$ olup matlûb hâsıl olur.

Netice 1 bâlâda istihrâc olunan muâdeleden

$q = m / r^n \quad n = \text{la } m - \text{la } q / \text{la } r \quad r = (m / q)^{1/n}$

Netice 2 faiz $= m - q = q r^n - q = q (r^n - 1)$

Misâl üç sene hitâmında 600 mecidiye ahz etmek için senevî yüzde beş faiz ile ne miktar akçe iʿtâ olunması için edeceği matlûbdur.

Bu bâbda $r = 1{,}05$ $n = 3$ $m = 600$

Bu ecelden $q = m / r^n = 600 / (1{,}05)^3 = 518{,}302$ mecidiye yani 518,302 mecidiyenin iʿtâ olunması için edeceği zâhir ve âşikâr olur.

(186) Fâiz-i mürekkeb tabiri ekseriya faizin beher sene hitâmında re'sü'l-mâle katılmasınna delalet eder ise de bazı kere faiz nısf sene ve rabia sene hitâmına değin işlemeğin akdemki maddede istihrâc olunan bâliğ düstûrunun bu sebepden nâşı bazı mertebe tebdil iktiza eder. Şöyle ki, eğer r miktarı bir mecidiyenin bir senelik faizini işʿâr eylese anifen beyan olunduğu üzere q mecidiyenin n sene hitâmında bâliği q = (1

+ $r)^{n}$ olur. Lakin eğer r / 2 miktarı bir mecidiyenin nısf senelik faizi olmuş olsa 1 + r /2 = bir mecidiyenin nısfı senelik bâliği olduğundan

$(1 + r/2)^2$ = bir mecidiyenin bâliği bir senelik

$(1 + r/2)^3$ = …………….. bir buçuk senelik

$(1 + r/2)^4$ = …………….. iki senelik

$(1 + r/2)^{2n}$ = …………….. n senelik

Ve bu misillü irâe olunabilir ki eğer r /4 bir mecidiyenin beher rabia senelik faiz olmuş olsa q mecidiyenin n senede hâsıl olan bâliği $q\ (1 + r/4)^{4n}$ ve ʿale'l-ʿumûm eğer faiz ezmine-i mütesaviyede senede k defa işlemiş tasvir olunsa bu takdirce beher mecidiyenin faizi r / k olmakla q mecidiyenin n senede hâsıl olan bâliği

$= q\ (4 + r / k)^{n k}$ olmuş olur.

Mesele herhangi bir miktar akçe faiz müfred veya mürekkeb hesabınca senevî bir faiz muayyen ile ne müddetin kendisini taz'îf eder. Fâiz-i müfred hesabınca

$m = q + q\ n\ r$

$\therefore \quad 2\ q = q\ (1 + r)^{n}$

yahud $(1 + r)^{n} = 2$

$\therefore \quad n = \text{la}\ 2 / \text{la}\ 1 + r$

Zîrde mevzu' cetvel işbu istihrâc olunan iki düstûr vasıtasıyla hesap olunmuş olup muhtelif faizler ile herhangi bir akçe kendisini tazʿîf edeceği müddetler cetvel-i mezkûrede muharrer olup logaritma cetvelleri vasıtasıyla her birilerinin sûret-i imtihanları talibinin badi-i muharetleri olacağından cetvel-i mezkûrun bu mahale vazʿı münasib görülmüşdür.

Bu dahi ma'lûm ola ki ilm-i cebir 'ulûm-ı hendeseye ve hakimiyenin esası olan bir ilm-i azime'l-nafia olarak suret-i tahsîli 'amellerine ziyâde iştigal ile olup eğerçe derûn-ı risâlede mübtedilere teshîl zammınında maddeleriyle bazı misâller beyân olunmuş ise de emsile-i merkûme kâfi olmadığından işbu risâlenin âhirine dahi ecvîbe-i mukteziyeleriyle emsile-i müteaddide derc olunmuştur.

Kad Kemal bahs-i ilmi'l- cebir be'avnillahi'l-melikü'l-kadir fî evâil-i Şaban el-muazzam li sene sitte ve sittin ve mieteyn ve elf (1266) min Hicret menlehü'l-'izz ve'ş-şeref.

SONUÇ

Osmanlı'da askeri alanda başlayan modernleşme hareketinin matematik çalışmalarını da etkilediği görülmüştür. Yeni tarz cebir eğitimi bu kurumlardan Mühendishanelerde ortaya çıkmış ve Mühendishane-i Berrî-i Hümayun başhocası İshak efendi'nin *Mecmua-i Ulum-ı Riyaziye*'nin Avrupa dillerinden tercüme ve adaptasyon şeklinde çevirdiği cebir ile ilgili kısmında başlamıştır. Mühendishane hocalarından ders görmüş olan Bostanîzâde Mehmet Tahir Paşa bu dersleri takip eden ilk nesil mühendislerden biridir. Tahir Paşa'nın yazdığı *Usûl-i Cebir*'adlı eseri yeni kurulmuş olan Mekteb-i Harbiye gibi modern askeri okullarda müstakil okutulan cebir kitabının ilkidir. Tahir Paşa bu kurumlarda cebir öğretmiş olmanın yanında birçok meşhur Osmanlı matematikçisinin yetişmesinde de rolü olmuştur. Bu şahsiyetlerden Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa en bilinenidir. Daha sonra Osmanlı matematikçilerinden Salih Zeki Bey Tahir Paşa'nın Usul-i Cebr kitabı ile Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa'nın bu kitaba yaptığı "Zeyl"den beğeni ile bahsemiştir. Hatta Türkiye Cumhuriyeti'nin ilk dönemlerine damgasını vurmuş olan ünlü bilim insanı Prof. Dr. Kerim Erim'in de Tahir Paşa'nın eserinden övgüyle bahsettiğini görüyoruz.

19. yüzyılda matematikle uğraşanlar genellikle Mühendishane ve daha sonra da Mekteb-i Harbiye gibi askeri okullarda Riyaziye hocaları olmuştur. Bu matematik hocalarının kimler ve eserlerinin neler olduğu biliniyor olsa da zorluğundan olsa gerek Osmanlı'nın son dönem matematiğini derinlemesine inceleyen bir çalışma henüz yapılmamıştır. Ancak, bu dönemde yaşamış matematikçilerin, yaşamları ve eserlerinin ayrıntılı bir biçimde incelenmesi, bir süre sonra dönemi kuşatıcı çalışmalar yapabilmeye imkân sağlayacaktır. Bu noktadan yola çıkarak, Osmanlı bilim/matematik tarihi ile ilgili çalışmalara katkı sağlayabilmek ümidiyle, 19. Yüzyıl Osmanlı matematikçilerinden biri olan Bostanîzâde Mehmet Tahir'in hayatını ve *Usûl-i Cebir* eserini inceledik. Kendisinin bilim/matematik tarihindeki yerini belirledik. Mekteb-i Harbiye matematik hocalarından Bostanîzâde Mehmet Tahir Paşa'nın *Usûl-i Cebir*'i 1266/1849-1850 ve 1278/1861-1862 ve 1288/1871-1872

senelerinde üç kez basılmıştır. Biz birinci baskısını inceledik, 219 sayfadan oluşmakta ve eserde içindekiler bölümü bulunmamaktadır. Önsözden sonra birinci maddeden konu anlatımına başlanmaktadır. İkinci baskısı Mekteb-i Fünūn-i Harbiye-i Şahane Matbaasında basılmıştır ve 4+3+348 sayfadan oluşmaktadır. Üçüncü baskısı Mekteb-i Harbiye Matbaasında basılmıştır. Hüseyin Tevfik Paşa, ikinci ve üçüncü baskılara birer zeyl yazmıştır. Atilla Polat'a göre, *Usûl-i* Cebir'in üçüncü baskısı toplam 409 sayfadan oluşmakta ve buna ek olarakta dokuz sayfalık bir düzeltmeler tablosu (hata-sevap cetveli) bulunmaktadır. Hüseyin Tevfik'in yazmış olduğu zeyil ise bir önsöz (s. 234) ile başlamakta ve konular toplam 99 maddede işlenmektedir.

Usûl-i Cebir içerik ve izlenen yöntem bakımından günümüzde de rahatlıkla lise son sınıf öğrencilerine okutulabilecek seviyededir. Tahir Paşa *Usûl-i Cebir* gibi *cebir* ilmi ile ilgili başlı başına bir eser ortaya koyarak bu alana adını yazdırmak istemiştir. Tüm bunların ışığında Bostanîzâde Mehmet Tahir 'in 19. yüzyıl Osmanlı bilim hayatında öncü bir matematikçi olduğunu söylemek yanlış olmayacaktır. Avrupalı ve Amerikalı çağdaşlarıyla kıyaslanınca yaptıkları çok önemli gözükmeyecek olsa da kendisini içinde bulunduğu toplum şartlarında değerlendirmenin daha doğru olacağını düşünüyoruz. Bu tez, Bostanîzâde Mehmet Tahir'in Osmanlı matematik eğitimine katkı yapmanın yanında, özgün matematik eserleri ortaya koymuş bir bilim insanı olduğunu göstermiştir.

Bostanîzâde Mehmet Tahir Paşa'nın *Usûl-i Cebr* adlı eserinin transliterasyonu, sadeleştirilmesi, içerik incelemesi ve matematiksel değerlendirmesi yapılmıştır. Tezin sonunda, eserde kullanılan matematik terimlerinin bir sözlüğü hazırlanmış ve okuyucaların istifadesine sunulmuştur.

KAYNAKÇA

ACAR, Ş., Bir, A., Kaçar, M. "Osmanlıda Sivil Mühendis Yetiştirmek Üzere Açılan Hendese-i Mülkiye Mektebi", *Osmanlı Bilimi Araştırmaları,* 17 (2016), s.9

AKSOY, Y., *Osmanlı'da ve Türkiye'de Matematik Eğitimi ve İlk Matematikçiler*, İstanbul 2015.

ASLAN, İ., "XVI. Yüzyıl Osmanlı Matematiğine Genel Bir Bakış", *Dört Öge*, yıl 3 Sayı 5 (2014), s. 1-35.

POLAT Atilla, *19. Yüzyıl Osmanlı Bilim Hayatında Öncü Bir Matematikçi: Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa*, Sosyal Bilimler Enstitüsi, Bilim Tarihi Bilim Dalı, İstanbul 2014.

BAGA, E., *Eş-Şemsiyye fi'l-Hisab Hesab Biliminde Kılavuz*, TYEK, İstanbul 2020.

BAGA, E., "Osmanlı Klasik Döneminde İstanbul'da Matematik İlimler", *Bilimname*, 45/2, (2021), s. 79–119.

BAGA, E., "Takıyyüddin Râsıd ve Cebir Risalesi: Matematiksel Değerlendirme, Tercüme ve Editio Princeps", *Nazariyat* 7/2, (2021) s. 1-52.

BİLGİN Aydın, *TDVİA*, C. 36, 2009, s. 51-54.

İZGİ, Cevat *Osmanlı Medreselerinde İlim*, C. 1, s. 207.

CEYHAN, O.T., "Klasik Dönem Osmanlı Matematiğinde Pîr Mahmud Sıdkı Edirnevî'nin "Çift Yanlış"" Metodu, *Erdem*, Sayı 79, 2020, s. 149-174

FAZLIOĞLU, İhsan, "Cebir", *TDV İA*, c. 7, 1993, 195-201.

DEĞİRMENDERE, M., *Kuyucaklızâde M. Âtıf ve Matematiğe Dair Nihâyetü'l-Elbâb fî Tercemeti Hulâsati'l-Hisâb" Adlı Eseri (Metin ve Değerlendirme),* Uludağ Ü. Sosyal Bilimler, Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, 2009.

İHSANOĞLU E., *Osmanlı Matematik Literatürü Tarihi,* C.I,1999, İslâm Tarih, Sanat ve Kültür Araştırmaları Merkezi, İstanbul.

İHSANOĞLU E., "Osmanlı Eğitim ve Bilim Müesseseleri", *Osmanlı Devleti ve Medeniyeti Tarihi*, c. 2, İstanbul 1998, s.223-361.

GÜLŞAH E., *Mekteb-i Harbiye'nin Türkiye'de Modern Bilimlerin Gelimesindeki Yeri (1834-1876)*, İÜ. Sosyal Bilimler Enstitüsi, Bilim Tarihi Bilim Dalı, İstanbul 2005.

GÜNGÖR, B., *Matematik Terimlerini Türkçeleştirme Hareketleri*, İ.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, (2013), s. 1-149

KAÇAR, M, "Osmanlı İmparatorluğu'nda Askeri Teknik Eğitimde Modernleşme Çalışmaları ve Mühendishanelerin Kuruluşu (1808'e kadar)", *Osmanlı Bilimi Araştırmaları* II, yay. Haz. F. Günergun, İstanbul 1998, s. 69-137.

KARATAY, E. F., *İstanbul üniversitesi kütüphanesi Türkçe basmalar alfabe katoloğu : memleketimizde ilk Türk matbaasının kuruluşundan yeni harflerin kabulüne kadar (1729-1928)*, c. 2, İstanbul 1956, s.785.

Mehmed Tahir, *İsûl-i Cebr*, Mekteb-i Harbiye, 1280.

Mehmed Tahir, *İlm-i Cerr-i Eskal*, Mekteb-i Harbiye, 1279.

Mehmed Tahir, *Fenn-i Kozmografya* İÜ. Nadir Eserler Kütüp. No: TY 222.

Mehmed Tahir, *Fenn-i Kozmografya,* Mekteb-i Harbiye, 1280/1863.

Mehmed Tahir, *Müsellessat-ı Cebiriye,* (*Müsellesat-ı Müsteviye ve Küreviye*), Mekteb-i Harbiye, 1279.

Ölmez, A. "II. Meşrutiyet Devrinde Osmanlı Medreselerinde Reform Çabaları ve Merkezileşme", *Vakıflar Dergisi*, 41, (2014), s. 1–14.

Polat, A., *19., Yüzyıl Osmanlı Bilim Hayatındaöncü Bir Matematikçi: Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa*, İ.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, (2014).

Salname-i Devlet-i Aliyye, Defa 17, Yıl 1279, s.40.

Salname-i Devlet-i Aliyye, Defa 19, Yıl 1281, s.78.

Salname-i Devlet-i Aliyye, Defa 20, Yıl 1282, s.62.

Salname-i Devlet-i Aliyye, Defa 22, Yıl 1284, s.75.

Salname-i Devlet-i Aliyye, Defa 24, Yıl 1286, s.95.

Salname-i Devlet-i Aliyye, Defa 25, Yıl 1287, s.102.

Takıcak, S. B. B., "Osmanlı Matematik Tarihi Çalışmalarının Terminoloji İle İmtihanı", *Bilim Tarihi Yazıcılığı Çalıştayı*, (2019), s. 1- 33

Takıcak, S. B. B., "Osmanlı ve Cumhuriyet Dönemi Matematikçilerinden Ord. Prof. Ali Yar'ın Matematik Kitapları", *Erdem*, Sayı 77, 2019, s. 217-238

Takıcak, M., "Mühendis Mehmet Misbah'ın Matematik Felsefesine ve Matematik Eğitimine Dair Görüşleri", *Erdem* Sayı 85, (2023), s. 151-172

Yoluk, E. M., *XVII. Yüzyılda Osmanlı Devleti´nde Eğitim ve Öğretim Faaliyetleri,* Selçuk Ü. Eğitim Bilimler, Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, 2010.

EKLER

EK: Terimler Sözlüğü

Âdem-i vücud: olmama

Ahad: birler

Âhar: diğer

Âhir: son

Ahz: almak

Akdem: en eski, önce

Akreb: en yakın

Aks: döndürmek

Alâ hâlihi: olduğu gibi

Ale'l-ʿumûm: genel olarak

Amûdî: dikey

Ânî: bir an, derhal

Ânifen: az önce, evvel, zikr ve beyan olunduğu üzere, az yukarıda

Ârî: yoksun, uzak

Asân: kolay

A'şâr: onda bir

Aşarat: onlar

Baʿde: sonra

Bâhusûs: özellikle

Bâlâda: yukarıda

Bâliğ: yekûn

Bed' etmek: başlamak

Beher: her biri

Beyʿ: satmak

Beyne: arasında

Ber: üst, üzere

Ber vech-i meşrûh: yukarıda ayrıntılarıyla açıklandığı üzere

Ber-vech-i âtî: aşağıdaki gibi

Bevâkî: geri kalan

Bi's-sühûle: kolaylıkla

Cânib: yan, taraf

Cârî: geçerli

Cezr: kök

Cezr-i asam: irrasyonel sayı

Darb: çarpma

Derece-i ûlâ muʿâdelâtî: birinci derece eşitlikler

Düstûr-u ʿumûmi: genel kaide, kanun

Düşvar: zor, güç

Ebced hurûf hecâsı: ebced alfabesi

Ecil: geriye bırakılan şey

Emsâl: katsayı

Ekal: en az

Elzem: çok gerekli

Emsile: örnekler

Eshel: daha kolay

Evvel emirde: ilk önce

Evzâʿ: durumlar

Eyyam (yevm): günler
Ezmine: zamanlar
Fasl-ı müşterek: ortak bölen
Fehim: anlayış, idrak

Ferd: tek kuvvet
Hadd: terim
Hâdis: meydana gelen, yeni
Hafere etmek: kazmak
Hafî: gizli
Halita: karıştırma
Halt: karıştırma
Hâric-i kısmet: bölüm
Hâvî: kapsayan, içinde
Hazf olunmak: silinmek
Hele-i evvelde: ilk bakışta
Hilâf: zıt, aykırı
Hitâm: son, nihayet
Hiyel-i mahsûsa: özel yöntem
İâne: yardım
İbtidâ: ilk başta, en evvel, başlangıç
İcrâ: yapma, yerine getirmek
İctinâb: kaçınmak, uzak durmak
İfâdat: ifadeler
İfnâ: yok etme
İfraz: ayırmak, bölmek
İhdâs: ortaya çıkarma
İhtisâr: sadeleştirme
İhtizâr: hazır olmak, vakti gelmek
İktifâ: kâfi, yeterli
İktizâ: lâzım gelme, gerekme
İltinab: kaçma, uzak durma
İntihâ: son
İnkisâr: kısalma
İrâd: söylemek
İrâe: gösterme
İrcâʿ: döndürme
İstihrâc: çıkarım, bulma
İstihsâl: elde etme, çıkarma
İstiʿlâm: kesin bilme
İstiʿmâl olunarak: kullanılarak
İstintâc: sonuç çıkarma
İşʿâr olunarak: yazılarak
İʿtâ: verme
İtnâb: sözü uzatma
İzʿaf: kat, çift
Kâbil: mümkün
Kâbil-i inkısâm: bölünebilme
Kâbil-i taksîm: bölünebilen
Kaide-i külliye: genel, kapsamlı kural
Kalb: değiştirmek, dönüştürmek
Kâsım: bölen, payda
Kutr: çap
Kavâʿid-i merʿıyye: riayet edilen kurallar
Kavâʿid-i umûmiyye: genel kaideler
Ke'l-evvel: evvelki gibi, ilki gibi
Kemâ fi's-sâbık: aynen eskisi gibi
Kemmiyât-ı asame: irrasyonel sayılar
Kemmiyet (kemmiyât): nicelik, miktar, sayı
Kesîr: çok fazla
Keşide: çizgi çekmek
Keyfe mâ ittifak: rastgele

Kezalik: bunun gibi, aynı şekilde
Kıs âleyh'i-l bevâkî: gerisini de buna kıyas et
Kimesne: kimse
Kuvâ: kuvvetler
Kuvvay-ı meksûre: kesr olunmuş kuvvetler
Li ecl'i-l ihtisâr: sadeleştirmek için
Madrûb: çarpan
Madrûb-u fîh: çarpılan
Mahdûd: sınırlı
Mahluta: karışım
Maʿkûs: baş aşağı ters dönmüş
Makrûn: ulaşmış, kavuşmuş
Maksûm: bölünen
Maksûm-u aleyh: bölen
Mebsût: açılmış, yayılmış
Meczûr: kare kökü alınmış sayı
Medlûl: mana, anlam, işaret edilmiş olan
Mefrûz: farz edilen, varsayılan
Mekâdir: miktarlar
Melhûz: düşünülen
Merkûb: kuvveti alınan
Merkum: adı geçen, rakamla söylenmiş
Mevâd: maddeler
Mevhûm: asılsız
Mezbûr: adı geçen, yukarıda söylenmiş olan
Müka'abı: küpü
Misillü: benzeri, aynısı, gibi
Muʿâdele (muʿâdelât): denklem
Muʿâdelât-ı mücerrede: birinci derece denklem
Muʿâdil: denk, eşit
Mubâyaa: satın alma
Mûcibince: gereğince
Mugayyer: değiştirilmiş
Muharrer: yazılı, yazılmış
Muhavvil: başka bir şekle sokan
Muhdis: karmaşık sayılar
Muhterʿa: karmaşık sayılar
Mukaddem: önceki, evvel
Muntak: ifade edilebilen, rasyonel
Musannif: kademeli, aşamalı, tasnif edilmiş
Mustatil: dikdörtgen
Muʿterize: parantez
Mübâşeret: başlama
Mübeddil: değiştiren
Mücerred: yalnız, tek, sade, basit
Müfred: tek, birleşik olmayan basit
Mümâsil: benzer
Müncer: çekilip götürülmek
Münderiç: bir şeyin içinde yer alan
Münfehim: anlaşılan
Müntehâ: son
Müsâvât: eşitlik
Müsâvî: eşit denk
Müstaʿmel: kullanılmış, kullanılan
Müteʿaddid: çok sayıda, bir çok
Müteʿârife: açıkça bilinen, ispatı icab etmeyen söz
Mütebâyin: birbirinden farklı, zıt

Müteşabih: benzer
Mütenâkıs: azalan, noksanlaşan
Mütenâsib: orantılı
Müteselsile: ard arda gelen
Mütetâb'ia: art arda gelen
Mütevâliye: ard arda gelen
Mütezayide: artan çoğalan
Müttehid: birleşik, birleşmiş
Nazîr: benzer, eş
Neş'et etme: ortaya çıkma
Nikâta: noktalar
Nümâyân: aşikâr
Olmağın: olduğundan
Rafʿî: yükseltme
Re'sü'l-mâl: ana sermaye
Sâbık: önceki
Sâir: diğer, öteki
Sarf-ı nazar: hesapa katmama, bir şeyden vazgeçme
Sâvâtinî: eşit olmak
Sebkat etmek: önceden geçmek
Sıhhat: doğruluk
Siyâk: uslüp, tarz, ifade şekli
Sûret: pay
Sûret-i mahraç: payda
Sümün: sekizde bir
Şol: öyle
Şerâit: şartlar, koşullar
Taadud: birden fazla olma
Tahlis: kurtarma
Tahrîr olunur: yazılır
Takrib: yaklaşma
Tâli: ikincil, sonra gelen
Tarafeyn: iki taraf, dışlar
Taraf-i yeminine: sağ taraf
Tarh: indirmek
Tavîl: uzun
Tazʿıf: ikiye katlama
Tebeyyün: açık olmak, zâhir olmak
Tebdil: değiştirme
Tecemmüʿ: grup, topluluk
Tecemmuât: toplanmalar
Teczîr: karakök alma
Tefahhus: derinlemesine araştırma
Tefattun: anlamak, farkına varmak
Tefâzul: iki miktar arasındaki fark
Teharrî: araştırmak
Tekʿib: küpünü almak
Tekmîl etmek: bitirmek, tamamlamak
Tekmîl murabbaʿ: tam kare
Tenâkus: eksilme
Tenâsüb: oran, iki adet birbirine nisbet edilerek yapılan hesap usûlü, kıyas
Tenbih: uyarı
Terbiʿ: karesini almak
Terettüb: icab etme, gerekme
Terfʿi: yükseltme
Teshîl: kolaylaştırma
Tesviye: düz hale getirme
Tevafuk: denk gelme
Tevakkuf: bir şeye bağlı olma
Tevâli: dizi, zincirleme, birbiri ardına gelme
Tevsiʿ: genişletme

Tevzî: dağıtma

Tezâyüd: artma

Tezkîr: hatırlatılmak, dile getirilmek

Tûlâ: en uzun

Vasateyn: orta terimler, içler

Vazʿ: durum, biçim

Vech-i âtî: aşağıdaki gibi

Vefk: uygun, uyum

Ve kıs ʿalâ haza: diğerleri de bunun gibi

Vücüh: şekiller, tarzlar

Vücûh-i sâiresî: diğer yönler

Yemîn: sağ

Yesâr: sol

Zâʿid: artan, artı

Zevç: çift kuvvet

Zıʿf: iki katı

Zımnında: maksadıyla

Zîr: alt

Zû'l-haddeyn: iki terimli

Zü hadd-ı vâhid: tek terimli

Zû hudûd-ı kesîre: çok terimli